Elektrizitäts-
lehre

Prof. Wachutka
(TU München)

(inoffizielle) Skriptzusammen-
fassung

aktueller Stand: 02.02.2007

Vorwort zur 9. Auflage:

Diese Skriptzusammenfassung entstand ursprünglich aus der Mitschrift der Erstsemester-Vorlesung „Elektrizitätslehre“, welche Herr Prof. Dr. Wachutka im Wintersemester 1999/2000 (und in den darauf folgenden Jahren im Wesentlichen unverändert) an der TU München für Studierende der Fachrichtung „Elektrotechnik und Informationstechnik“ gehalten hat. Sie wurde im April 2005 mit Hilfe des Originalskriptums auf den Stand vom Wintersemester 2004/2005 gebracht.

Für diese Auflage wurden kleinere Textänderungen vorgenommen, welche auf einer Korrektur der Formelsammlung von Herrn Prof. Dr. Wachutka basieren. Des weiteren sind einige hartnäckige Druckfehler beseitigt worden.

Wichtiger Hinweis:

Diese Skriptzusammenfassung eignet sich hervorragend dazu, sich zusammen mit den Theorieerklärungen aus dem von der Fachschaft gedruckten Skriptums der Vorgängerprofessoren Börner und Stäblein auf die Prüfung vorzubereiten. Sie darf aber leider nicht in der Prüfung „Elektrizitätslehre“ an der TU München verwendet werden: In der Prüfung sind (außer dem Skriptum der Vorgängerprofessoren und einer mathematischen Formelsammlung) nur „5 Blätter DIN-A4 eigene handschriftliche Aufzeichnungen“ zugelassen.

Kontakt:

Die jeweils aktuelle Version dieser Formelsammlung und anderes (Formelsammlungen für andere Fächer, Linksammlungen etc.) kann man sich auf meiner Webseite herunterladen:
http://studium.simonblank.de1.cc

Korrektur- und Verbesserungsvorschläge sind jederzeit herzlich willkommen. Ich bin unter folgender E-Mail-Adresse zu erreichen: *simonblank@gmx.de*

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1: Elektrostatik

Kapitel 2: stationäre Ströme

Kapitel 3: Magnetostatik

Kapitel 4: induzierte elektrische Felder und Spannungen

Kapitel 5: Elemente der Wechselstromlehre

Kapitel 1: Elektrostatik

1.1 Kräfte zwischen elektrischen Punktladungen

$\left|\vec{F}_{2\leftarrow 1}\right| = \left|\vec{F}_{1\leftarrow 2}\right| = \gamma_e \cdot \frac{|q_1 \cdot q_2|}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2}$ mit $\gamma_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ (im Vakuum)

(1.1)

$\vec{F}_{2\leftarrow 1} = -\vec{F}_{1\leftarrow 2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ Coulombsches Gesetz (im Vakuum)

1.2 Superpositionsprinzip

(1.2)

$\vec{F}_q(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i)$ Kraft, die eine Anordnung von N Ladungen $q_i\,(i = 1 \ldots N)$ an den Orten $\vec{r}_i\,(i = 1 \ldots N)$ auf eine weitere Ladung q am Ort $\vec{r}$ ausübt

1.3 Elektrische Feldstärke

(1.3)

$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i)$ $\vec{E}$-Feld einer diskreten Ladungsverteilung $(q_i, \vec{r}_i)_{i=1\ldots N}$; Einheit: $\left[\vec{E}\right] = \frac{V}{m}$

(iii) Spezialfall: Feld einer Punktladung q_0 am Ort $\vec{r}_0$

(1.4)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} \cdot \frac{q_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)$$

(iv) Spezialfall: Dipolfeld, Ladungen $(Q, \vec{r}_1)$ und $(-Q, \vec{r}_2)$

(1.5)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_2)\right]$$

1.4 Elektrische Arbeit

(1.6)

$W_{12} = \int_0^l \vec{F}(\vec{r}(\vec{s})) \cdot \underbrace{\vec{t}(s) \cdot ds}_{d\vec{r}} =: \int_{C(P_1,P_2)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ Arbeit, um Massenpunkt (z.B. Punktladung) im Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ längs Weg $C(P_1, P_2)$ zu bringen; mit s := Bogenlänge

Der Wert des (Weg-)Integrals $\int_{C(P_1,P_2)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ ist unabhängig von der Wahl der Parameterdarstellung, solange die Orientierung $P_1 \rightarrow P_2$ beibehalten wird.

(iii) Konservative Kraftfelder

Ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ heißt *konservativ*, wenn das Wegintegral $\int_{C(P_1,P_2)} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$ *nur* von P_1 und P_2, aber *nicht* von der Wahl des verbindenden Weges $C(P_1,P_2)$ abhängt.

Es gilt: $\vec{F}(\vec{r})$ konservativ <=> $\frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ für alle i,j $(i \neq j)$ (für einfach zusammenhängende Gebiete)

1.5 Elektrische Spannung und Potential

(1.7) Definition:

$U_{12} = \frac{W_{12}}{q} = \int_{C(P_1,P_2)} \vec{E}\cdot d\vec{r}$ Elektrische Spannung; Einheiten: $[W_{12}] = J$, $[U_{12}] = V$

„Grundgesetz der Elektrotechnik“: Elektrostatische Felder sind konservativ!

(iii) Folgerung:

(1.8)

$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$ bei elektrostatischen Feldern für jede geschlossene Kurve C!

(iv) Definition:

(1.9a)

$\Phi(\vec{r}) = U_{PP_0} = \int_P^{P_0} \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_{P_0}^{P} \vec{E}\cdot d\vec{r}$ *Elektrostatisches Potential* bzgl. P_0 ist definiert als elektrische Spannung zwischen einem *beliebigen* Punkt P (am Ort $\vec{r}$) und einem *festen* Referenzpunkt P_0 (am Ort $\vec{r}_0$); wird gesetzt: $\Phi(\vec{r}_0) := 0$

(v) Folgerung:

(1.10)

$U_{P_1P_2} = U_{12} = \Phi(\vec{r}_1) - \Phi(\vec{r}_2)$

(1.9b)

$\Phi(\vec{r}) = \Phi(\vec{r}_0) - \int_{P_0}^{P(\vec{r})} \vec{E}(\vec{r})\, d\vec{r}$ wobei $\Phi(\vec{r}_0)$ beliebig zu wählen ist

(vi) Äquipotentialflächen

Die Flächen $\Phi(\vec{r}) = \text{const.}$ heißen *Äquipotentialflächen*.
Für zwei beliebige Punkte $P_1, P_2 \in \{\Phi(\vec{r}) = \text{const.}\}$ ist $U_{12} = 0$.
Längs *jeden* Weges $C \in \{\Phi(\vec{r}) = \text{const.}\}$ ist $\int_C \vec{E}(\vec{r})\, d\vec{r} = 0$.

=> $\vec{E}$ steht senkrecht auf allen Tangenten an die Äquipotentialflächen $\Phi(\vec{r}) = \text{const.}$, d.h., $\vec{E}$ ist $\uparrow\uparrow$[1] zur Oberflächennormale

[1] Zeichenerklärung: $\uparrow\uparrow$ – gleichsinnig parallel

(vii) Beispiel: Potential einer Punktladung Q am Ort $\vec{r}_Q$

(1.11)

$$\int_{P(\vec{r})}^{P(\vec{r}_0)} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{1}{\vec{r}-\vec{r}_Q}-\frac{1}{\vec{r}_0-\vec{r}_Q}\right] = \Phi(\vec{r})-\Phi(\vec{r}_0)$$

(1.12)

$$\Phi(\vec{r}) = \underbrace{\Phi_\infty}_{=:0} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}_Q|}$$ für Referenzpunkt $|\vec{r}_Q| \to \infty$

(iix) Beispiel: Potential einer diskreten Ladungsverteilung $(q_i, \vec{r}_i); i = 1\ldots N$

(1.13)

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

1.6 Elektrische Felder in polarisierbaren materiellen Medien (Dielektrika)

1.6.1 Dielektrizitätskonstante (elektrische Permittivität)

(i) In polarisierbaren Medien gilt das Coulombsche Gesetz, aber mit verringerter Kraftkonstante

(1.14)

$$\vec{F}_q(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_r}\vec{F}_{q,\text{Vakuum}}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\underbrace{\varepsilon_0\varepsilon_r}_{=:\varepsilon}}\cdot\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

1.6.2 Dielektrische Verschiebung, Gaußsches Gesetz

(1.15)

$\vec{D}(\vec{r}) := \varepsilon\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \varepsilon_0\varepsilon_r\cdot\vec{E}(\vec{r})$ ist nur von erzeugter Ladung bestimmt; Einheit: $[\vec{D}] = \frac{A\cdot s}{m^2}$

(iii) Verallgemeinerung: beliebiger Ort $\vec{r}_0$ von Q und beliebige Hüllfläche

(1.16)

$$\int_{H=\partial V} \vec{D}\cdot d\vec{a} = \begin{Bmatrix} Q \Leftarrow \vec{r}_0 \in V \\ 0 \Leftarrow \vec{r}_0 \notin V \end{Bmatrix}$$

(iv) Gaußsches Gesetz (für Punktladungen)

(1.17)

$\int_{H=\partial V} \vec{D}\cdot d\vec{a} = Q(V) = \sum_{\vec{r}_i\in V} q_i$ es gilt: $Q(V)$ ist die von der Hüllfläche $H = \partial V$ *eingeschlossene Ladung*

(v) Einschub: Flächenintegrale in $\mathbb{R}^3$

$d\vec{a} = \vec{N}\cdot da = (\vec{t}_1\times\vec{t}_2)\cdot du\,dv$ Vektorielles Oberflächenelement

$$\int_S \vec{F}\cdot d\vec{a} := \int_{v_0}^{v_1}\int_{u_0}^{u_1} \vec{F}\left(\vec{r}(u,v)\right)\cdot\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)du\,dv$$ Fluss eines Vektorfeldes $\vec{F}(\vec{r})$ durch eine Fläche S

Spezialfall: Falls $S \equiv$ Hüllfläche H, dann wird $\vec{N}$ *aus Konvention* nach „außen“ orientiert

1.7 Kontinuierliche Ladungsverteilungen

1.7.1 Raumladungsdichte

(i) Idee

$$\rho(\vec{r}) = \frac{\text{Zahl der Ladungen in } \Delta V(\vec{r})}{\Delta V(\vec{r})}$$ für $\Delta V \to 0$

(ii) Definition

$\rho(\vec{r})\cdot d^3r = \rho(x,y,z)\cdot dx\,dy\,dz$ ist die im Volumenelement $dx\,dy\,dz$ enthaltene Ladung dQ, sodass $\int_V \rho(\vec{r})\cdot d^3r = Q(V)$ für beliebige Volumina („Gebiete“) V die eingeschlossene Ladung ergibt.

Kurz: $\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V(\vec{r})\to 0} \frac{Q(\Delta V(\vec{r}))}{\Delta V(\vec{r})}$

1.7.2 Oberflächenladungsdichte

(i) Idee

In Leitern sitzt die elektrostatische Ladung auf einer sehr dünnen Schicht auf der Oberfläche S verteilt:

$$\sigma(\vec{r}) = \frac{\text{Zahl der Ladungen in } \Delta A(\vec{r})}{\Delta A(\vec{r})}$$ für $\Delta A \to 0$

(ii) Definition

$\sigma(\vec{r})\cdot da = \sigma(\vec{r}(u,v))\cdot\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|\cdot du\,dv$ ist die im Oberflächenelement da enthaltene Ladung dQ, sodass $\int_S \sigma(\vec{r})\cdot da = Q(S)$ für beliebige Flächenstücke S die enthaltene Ladung ergibt.

1.7.3 Gaußsches Gesetz (für Raumladungsverteilungen)

(i) Raumladungsverteilung

(1.18)

$$\int_{H=\partial V} \vec{D}\cdot d\vec{a} = Q(V) = \int_V \rho\cdot d^3r$$ für jedes Gebiet V mit Hüllfläche ∂V

(ii) Oberflächenladungsverteilung

(1.19)

$\int\limits_{H=\partial V} \vec{D}\cdot d\vec{a} = Q\left(V \cap S\right) = \int\limits_{S\cap V} \sigma \cdot da$ für jedes Gebiet V, das eine Leiteroberfläche S schneidet

(1.20)

$\vec{D}\cdot\vec{N} = \sigma$ auf Leiteroberflächen *außerhalb* des Leiters ($\vec{N}$ zeigt vom Leiter nach außen)

1.8 Elektrostatische Felder zwischen leitenden Medien

1.8.1 Influenz

(i) Definition von Leiter

In einem Leiter sind sehr viele frei bewegliche Ladungsträger vorhanden ($\approx 10^{21}$ - 20^{23} Elementarladungen pro cm^3).
=> Leiter sind Äquipotentialgebiete (bzw. -flächen)
=> Leiter haben wegen dielektrischer Abschirmung *keine Raumladung*

es gilt: $\vec{E} \equiv 0 \Leftrightarrow \Phi = \text{const.}$

(ii)

Wird ein Leiter einem äußeren elektrostatischen Feld ausgesetzt, so wird durch Ladungsverschiebung eine Oberflächenladung σ induziert, sodass gilt:

1. $\vec{E} = 0$ im Inneren des Leiters
2. $\vec{E} \perp \text{Leiteroberfläche}$ (außen)
3. $\vec{D}\cdot\vec{N} = \sigma$ auf Leiteroberfläche („Influenz").

1.8.2 Kapazität

(i) Definition

$U_{12} = \Phi_1 - \Phi_2 = \int\limits_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{r}$ hier: $\Phi_1 > \Phi_2$; Leiter 1 habe die Ladung Q, Leiter 2 die Ladung $-Q$

$Q = \int\limits_{H \text{ um } "1"} \vec{D}\cdot d\vec{a}$

(1.21)

$$C := \frac{Q}{U_{12}} > 0$$

(1.22)

$C = \dfrac{\varepsilon\cdot\int\limits_H \vec{E}\cdot d\vec{a}}{\int\limits_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{r}}$ => $C = f\left(\varepsilon, \text{Geometrie}\right)$, unabhängig von $\vec{E}$!

(ii) Beispiel: Plattenkondensator

(1.23)

$$C = \frac{Q}{U_{12}} = \varepsilon \cdot \frac{A}{d} \quad \text{mit } Q = \int_{H_1} \vec{D} \cdot d\vec{a} = \left|\vec{D}\right| \cdot A = \varepsilon \cdot \left|\vec{E}\right| \cdot A \quad \text{und } U_{12} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = \left|\vec{E}\right| \cdot d$$

(bei Vernachlässigung der Streufelder)

$$\sigma = \vec{D} \cdot \vec{N} = \left|\vec{D}\right| = \frac{Q}{A} = \text{const.}$$ Flächenladungsdichte

(iii) Beispiel: Kugelkondensator

(1.24)

$$C = \frac{Q}{U_{12}} = 4\pi\varepsilon \cdot \frac{a \cdot b}{b - a}$$ mit a := Innenradius, b := Außenradius,

$$Q = \int_{|\vec{r}|=r} \vec{D} \cdot d\vec{a} = \varepsilon \cdot E(r) \cdot 4\pi r^2$$ und

$$U_{12} = \int_a^b E(r) \cdot dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \int_a^b \frac{1}{r^2} \cdot dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \cdot \left(\frac{b-a}{a \cdot b}\right)$$

$$\underbrace{C_\infty}_{\text{Kugelkapazität gegen } \infty} = 4\pi\varepsilon \cdot a$$ mit $b \to \infty$

1.9 Kondensatoraggregate

(i) Parallelschaltung

(1.25)

$$C_{parallel} = \frac{Q_{total}}{U} = \sum_{i=1}^{N} C_i$$

(ii) Serienschaltung

(1.26)

$$\frac{1}{C_{seriell}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}$$

(iii) Parallel geschichtete Dielektrika

(1.27)

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_1 A_1}{d} + \frac{\varepsilon_2 A_2}{d} \quad \text{mit } Q = (\varepsilon_1 \cdot A_1 + \varepsilon_2 \cdot A_2) \cdot \frac{U}{d}$$

Dabei gilt: $Q = Q_1 + Q_2 = \underbrace{\sigma_1}_{|D_1|} A_1 + \underbrace{\sigma_2}_{|D_2|} A_2 = \varepsilon_1 \cdot \underbrace{\left|\vec{E}_1\right|}_{\frac{U}{d}} \cdot A_1 + \varepsilon_2 \cdot \underbrace{\left|\vec{E}_2\right|}_{\frac{U}{d}} \cdot A_2$

(iv) Seriell geschichtete Dielektrika

$$\left|\vec{D}_1\right| = \left|\vec{D}_2\right| = \frac{Q}{A}$$

(1.28)

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{A}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}} \quad \text{mit} \quad U = \left|\vec{E}_1\right| \cdot d_1 + \left|\vec{E}_2\right| \cdot d_2 = \left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}\right) \cdot \frac{1}{A} \cdot Q$$

1.10 Elektrostatische Feldenergie

(i) Energie eines aufgeladenen Kondensators

(1.29)

$$W_{el} = \frac{1}{2} \cdot UQ = \frac{1}{2} \cdot CU^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}$$

(ii) Energiedichte des $\vec{E}$-Feldes

$$w_{el} := \frac{W_{el}}{V} = \frac{1}{2}\left|\vec{E}\right| \cdot \left|\vec{D}\right| = \frac{1}{2}\varepsilon \cdot \left|\vec{E}\right|^2 = \frac{1}{2\varepsilon} \cdot \left|\vec{D}\right|^2$$ für Plattenkondensator

(1.30)

$$w_{el} = \frac{1}{2}\left(\vec{E} \cdot \vec{D}\right)$$ allgemein

Kapitel 2: stationäre Ströme

2.1 Elektrische Stromstärke und Stromdichte

(i) Strom

$$\text{Strom} := \frac{\text{Ladungsfluss}}{\text{Zeit}}$$

(2.1)

$$I_A(A) = \frac{dQ_A}{dt} \qquad \text{Einheit: } [I] = \frac{C}{s} = A$$

(ii) elektrische Stromdichte:

$\left|\vec{j}\right| = \frac{I_A(A)}{A}$ für $A \to 0$ und $A \perp \text{Stromfluss}$; die Richtung von $\vec{j}$ ist die Tangente an den Ladungsflusslinien (Ladungstrajektorien)

(2.2)

$dQ = \vec{j} \cdot d\vec{a} \cdot dt$ ist die pro Zeiteinheit dt durch $d\vec{a}$ fließende Ladung => $dI_A = \vec{j} \cdot d\vec{a}$ => $I_A(A) = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{a}$

Einheit: $\left[\vec{j}\right] = \frac{A}{m^2}$

(iii) Zusammenhang mit Raumladungsdichte

$\rho(\vec{r}) = q \cdot n(\vec{r})$ mit $n := \frac{\text{Trägeranzahl}}{\text{Volumen}}$ (Trägerkonzentration) und q := Ladung eines Trägers

für mehrere Trägersorten gilt: $\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} q_i \cdot n_i(\vec{r})$

Die im Volumen dV befindlichen Ladungsträger sind genau die, die in der Zeit dt die Kontrollfläche $d\vec{a}$ passiert haben: $dQ = \vec{j} \cdot d\vec{a} \cdot dt = q \cdot n \cdot dV = q \cdot n \cdot d\vec{a} \cdot \vec{v} \cdot dt$

(2.3)

$\vec{j} = \underbrace{q \cdot n}_{\rho} \cdot \vec{v}$ gilt nur für eine Trägersorte; $\vec{j}$:= Stromdichte; $\vec{v}$:= Geschwindigkeit des Trägers

(2.4)

$\vec{j} = \sum_{i=1}^{N} q_i \cdot n_i \cdot \vec{v}_i$ gilt für mehrere Trägersorten (allg. Fall)

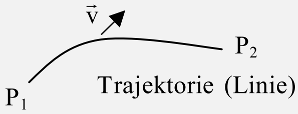
2.2 Ladungstransport im elektrischen Feld

2.2.1 Transport ohne Stoßprozesse (Vakuum)

$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = q \cdot \vec{E}(\vec{r})$ Bewegungsgleichung eines einzelnen Ladungsträgers

(2.5)

$$\frac{1}{2} m \cdot \left(v_2^2 - v_1^2\right) = q \cdot U_{12}$$ Energiebilanz



$$v(U) = \frac{2 \cdot q}{m} \cdot \sqrt{U}$$ wenn gilt: $v(0) = 0$

2.2.2 Transport mit Stoßprozessen (Leiter)

(i) Beweglichkeit

Viele Ladungsträger, die an Streuzentren abgebremst werden. Statistik über viele Streuprozesse
=> mittlerer (Drift-)Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{v}\left(\vec{E}\right)$, mittlere Stoßzeit τ und effektive Masse m^*

$$q \cdot \vec{E} = m^* \cdot \left\langle \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right\rangle = m^* \cdot \frac{\vec{v}}{\tau}$$ und $$\vec{v} = \underbrace{\left(\frac{q \cdot \tau}{m^*}\right)}_{\mathrm{sgn}(q)\cdot\mu} \cdot \vec{E}$$ linearer Ansatz mit μ := Beweglichkeit. Dabei gilt: $\mu > 0$

(2.6)

$$\vec{v} = \mathrm{sgn}(q) \cdot \mu \cdot \vec{E}$$ mittlere (Drift-)Geschwindigkeit

(2.7)

$$\vec{j} = |q| \cdot n \cdot \mu \cdot \vec{E}$$ Stromdichte bei *einer* Trägersorte

(2.8)

$$\vec{j} = \sum_{i=1}^{N} \left(|q_i| \cdot n_i \cdot \mu_i\right) \cdot \vec{E}$$ Stromdichte bei *mehreren* Trägersorten

(ii) Ohmsches „Gesetz“ in lokaler Form

(2.9)

$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$ (gilt in jedem Fall) mit $\sigma = \sum_{i=1}^{k} |q_i| \cdot n_i \cdot \mu_i$:= spezifische elektrische Leitfähigkeit;

Einheit: $[\sigma] = \frac{A}{V \cdot m} = \frac{S}{m} = \frac{1}{\Omega \cdot m}$

(iii) Ohmsches „Gesetz“ in integraler Form

(2.10)

$I = G \cdot U_{12}$ mit $I = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{a} = \int_A \sigma \cdot \vec{E} \cdot d\vec{a} = \underbrace{\sigma \cdot \frac{A}{l}}_{=G} \cdot U$

mit:

- A := homogener Querschnitt, σ := homogene Leitfähigkeit und l := Länge des mit dem Strom I durchflossenen Leiters
- $U_{12} = \Phi_1 - \Phi_2 > 0$ (Φ_1, Φ_2 := Klemmenpotentiale)
- Der Strom fließt von Klemme 1 nach Klemme 2, Strom I und Spannung U_{12} haben die gleiche Zählpfeilrichtung

(2.11)

$$G = \sigma \cdot \frac{A}{l}$$ elektrischer Leitwert; Einheit: $[G] = \frac{A}{V} = S = \frac{1}{\Omega}$

(2.12)

$$U_{12} = R \cdot I$$ mit $R = \frac{1}{G}$

(2.13)

$$R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{A} = \rho \cdot \frac{l}{A}$$ elektrischer Widerstand

(2.14)

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$ spezifischer elektrischer Widerstand; Einheit: $[\rho] = \Omega \cdot m,\ \Omega \frac{mm^2}{m}$

Flussrichtung von I: vom höheren Potentialwert zum niedrigeren Potentialwert

2.3 Ladungsbilanz

(i) Integrierte Darstellung (allgemein gültig)

(2.15)

$$\int_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{a} = -\frac{dQ(V)}{dt}$$

Für eine stationäre Stromverteilung gilt: $\frac{d}{dt} = 0$ (wg. $Q(V)$ zeitlich konstant) => $\int_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{a} = 0$ für jede beliebige Hüllfläche ∂V

(ii) Kirchhoffsche Knotenregel

(2.16)

$$\sum_{k=1}^{N} I_k = 0$$

2.4 Schaltungen mit ohmschen Widerständen

(i) Serienschaltung

(2.17)

$$R_{seriell} = \sum_{i=1}^{N} R_i$$ wegen $U = \sum_{i=1}^{N} U_i = \sum_{i=1}^{N} R_i \cdot I = R \cdot I$

(ii) Parallelschaltung

(2.18) und (2.19)

$$\frac{1}{R_{parallel}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}$$ bzw. $G = \sum_{i=1}^{N} G_i$ wegen $I = \sum_{k=1}^{N} I_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{U_k}{R_k} = \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{R_k} \right) \cdot U = \frac{U}{R}$

2.5 Elektrische Netzwerke aus galvanisch gekoppelten Gleichstromkreisen

(i) Spannungsquelle (Innen- und Lastwiderstand in Serienschaltung)

(2.20)

$U_0 = R_i \cdot I + \underbrace{R_{Last} \cdot I}_{U_k} \Rightarrow U_k = U_0 - R_i \cdot I$ mit U_0 := eingeprägte Spannung, R_i := Innenwiderstand und U_k := Klemmenspannung

Für max. Stromfluss gilt: $U_k = 0 \Leftrightarrow I_{max} = \frac{U_0}{R_i}$

(ii) Stromquelle (Innen- und Lastwiderstand in Parallelschaltung)

$U_k = R_i \cdot I_i = \underbrace{R_i \cdot I_0}_{=U_0} - R_i \cdot I$ Klemmenspannung; mit I_0 := eingeprägter Strom und R_i := Innenwiderstand einer Stromquelle

(iii) Kirchhoffsche Maschenregel

(2.21)

Es gilt $\sum_{i=0}^{N} U_i = 0$ für jede Masche $K_0, K_1, ..., K_N, \underbrace{K_{N+1}}_{:=K_0}$ (:= geschlossene Knotenfolge), wobei $U_i := U\left(\overrightarrow{K_{i-1}K_i}\right)$ die gerichtete Spannung längs des Stromzweiges $\overrightarrow{K_{i-1}\,K_i}$ bezeichnet[2].

(v) Allgemeine Regeln für Netzwerkanalyse

1. Bestimme K = Anzahl der Knoten (:= Verknüpfung von mehr als zwei Zweigen) des Netzwerks
2. Bestimme Z = Anzahl der Zweige (:= Folge von einfachen Kanten zwischen zwei Knoten)

Unbekannte:
- Zweigströme $I_1, I_2, ..., I_{Z'}$ (es gilt: $Z' \leq Z$) in den Zweigen *ohne* Stromquellen
- Spannungen $U_1, U_2, ..., U_{Z-Z'}$ in den $Z - Z'$ Zweigen *mit* eingeprägtem Strom

=> also insgesamt Z *Unbekannte*

Gleichungen:
- $K-1$ linear unabhängige Knotengleichungen
- $M = Z - (K-1)$ linear unabhängige Maschengleichungen

Regel: Jede neue Maschengleichung muss über noch nicht genutzten Zweig des Netzwerkes führen.

Sind $(I_1, I_2, ..., I_{Z'}; U_1, U_2, ..., U_{Z-Z'})$ bestimmt, lassen sich Zweigspannungen gemäß $U_k = R_k \cdot I_k\ (k = 1 \ldots Z')$ bestimmen.

[2] Achtung: Im Skriptum „Elektrizitätslehre“ (Börner, Stäblein, Wachutka) auf S. 61 sind die Spannungen falsch durchnummeriert!

2.6 Elektrische Leistung und Energieübertragung

(i) Leistungsbegriff (allgemein)

$P_{el} = \frac{dW_{el}}{dt} = \frac{q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{r}}{dt} = q \cdot \vec{E} \cdot \vec{v}$ gilt für *einen* Ladungsträger

(2.22)

$P_{el}^{(i)} = q_i \cdot \vec{v}_i \cdot \vec{E}$ Leistung eines Ladungsträgers der Spezies (i)

(ii) Leistung bei bewegter Raumladung

$\vec{j} = \sum_{i=1}^{k} q_i \cdot n_i \cdot \vec{v}_i$ elektrische Stromdichte (mit k Sorten verschiedener Ladungsträger); vgl. (2.4)

(2.23)

$p_{el} = \sum_{i=1}^{k} P_{el}^{(i)} \cdot n_i = \left(\sum_{i=1}^{k} q_i \cdot n_i \cdot \vec{v}_i \right) \cdot \vec{E} = \vec{j} \cdot \vec{E}$ Elektrische Leistungsdichte

(iii) (Verlust-)Leistungsdichte bei ohmscher Driftbewegung

(2.24)

$$p_{el} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma \cdot \left|\vec{E}\right|^2 = \frac{1}{\sigma} \cdot \left|\vec{j}\right|^2 = \rho \cdot \left|\vec{j}\right|^2$$

(iv) Verlustleistung in einem Draht (Länge *l* mit dem Querschnitt A)

$P_{el} = p_{el} \cdot A \cdot l = \left|\vec{j}\right| \cdot A \cdot \left|\vec{E}\right| \cdot l = I \cdot U$ mit $I = \left|\vec{j}\right| \cdot A$ und $U = \left|\vec{E}\right| \cdot l$

(2.25)

$P_{el} = U \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}$ falls $U = R \cdot I$ gilt; Einheit: $[P_{el}] = W = VA$

(v) Elektrische Energieübertragungsverluste

Eine Energiequelle (Quellenspannung U_E) speist in eine Leitung (Widerstand der Leitung: R_L) den Strom I. Die beim Energieverbraucher anliegende Klemmenspannung sei U_V. Dann gilt:

Erzeugte Leistung: $P_E = U_E \cdot I$

Verbrauchte Leistung: $P_V = U_V \cdot I$ mit $U_V = U_E - R_L \cdot I$

(2.26)

$\eta = 1 - \frac{R_L \cdot P_E}{U_E^2}$ Übertragungswirkungsgrad

Herleitung: $\eta = \frac{P_V}{P_E} = \frac{U_V}{U_E} = \frac{U_E - R_L \cdot I}{U_E} = 1 - \frac{R_L \cdot I}{U_E}$

Es gilt: $\eta \to 1$ für $U_E \to \infty$ (Hochspannungs-Gleichstrom-Übertragung, abgekürzt: HGÜ)

Kapitel 3: Magnetostatik

3.1 Kräfte auf im Magnetfeld bewegte Ladungen

(i) Lorentzkraft

(3.1)

$\vec{F}_L = q\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$ mit $\vec{F}_L$:= Lorentzkraft und $\vec{B}$:= magnetische Kraftflussdichte (magnetische Induktion) oder „$\vec{B}$-Feld“ („Magnetfeld“).

Einheiten: $\left[v\cdot B\right] = \frac{V}{m} \Rightarrow \left[B\right] = \frac{V\cdot s}{m^2} = T$ mit T := Tesla

(ii) Superpositionsprinzip: Elektromagnetische Kraftwirkung

(3.2)

$$\vec{F} = q\cdot\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

(iii) Leistung im $\vec{B}$-Feld

$P_{magn} = \frac{dW_{magn}}{dt} = q\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} = \vec{0}$ mit $dW_{magn} = F_L\cdot d\vec{r} = q\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{r}$

=> Ein statisches Magnetfeld leistet keine Arbeit!

(iv) Bewegung im homogenen Magnetfeld

$m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = q\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$ mit q := Ladung und m := Masse eines Massenpunktes

(3.4)

$\Omega = \frac{q\cdot B}{m} = 2\cdot\pi\cdot\nu$ Gyrationsfrequenz

Trajektorie im Ortsraum (Schraubenlinie im $\mathbb{R}^3$, welche parallel zu $\vec{B}$ ist):

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_x(t')dt' = x(t_0) - \frac{v_\perp}{\Omega}\cdot\cos\left[\Omega\cdot(t-t_0)\right]$$

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_y(t')dt' = y(t_0) + \frac{v_\perp}{\Omega}\cdot\sin\left[\Omega\cdot(t-t_0)\right]$$

$$z(t) = z(t_0) + v_\parallel(t-t_0)$$

mit $v_\perp = \sqrt{v_x^2(t_0)+v_y^2(t_0)} = \left|\vec{v}_\perp\right| = \sqrt{v_x^2(t)+v_y^2(t)}$

(3.5)

$R = \frac{v_\perp}{\Omega}$ Radius einer Schraubenlinie in $\mathbb{R}^3$;

(v) Kraft auf Stromverteilung

(3.6)

$\vec{f}_L = \vec{j} \times \vec{B}$ Lorentzkraftdichte; mit $\vec{j}$:= elektrische Stromdichte (vgl. (2.4))

Herleitung: $\vec{f}_L = \sum_{i=1}^{k} q_i \left(\vec{v}_i \times \vec{B}\right) \cdot n_i = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k} q_i \cdot n_i \cdot \vec{v}_i\right)}_{\vec{j}} \times \vec{B}$ mit k Sorten verschiedener Ladungsträger

3.2 Kraft und Drehmoment auf stromführende Leiter

(i) Grundvorstellung

(3.7)

Die Kraft auf im Leiter bewegte Ladungen wird vollständig auf das Substratmaterial (z.B. Wirtsgitter) übertragen:

$$\vec{F}_{Leiter} = \int_V \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) \cdot d^3 r$$

(ii) Linienförmige Leiter („Drähte“)

(3.8)

$\vec{F}_{Leiter} = -\int_C \vec{B}(\vec{s}) \times I \cdot d\vec{s}$ mit $I = \int_{A(\vec{s})} \left|\vec{j}(\vec{r})\right| \cdot da = \text{const.}$

(3.9)

$\vec{F}_{Leiter} = \int_C d\vec{F}$ mit $d\vec{F} = I \cdot d\vec{s} \times \vec{B}$ (differenzielle Darstellung)

(iii) Drehmoment auf Leiterschleife

$\vec{M} := \left(\vec{r} - \vec{r}_0\right) \times \vec{F}$ Definition des Drehmoments für einen Massenpunkt

Drehmoment auf rechteckige Drahtschleife

$\vec{M} = \int_C \underbrace{\left(\vec{r} - \vec{r}_{Achse}\right)}_{=\vec{R}} \times d\vec{F} = 2 \cdot I \cdot \vec{b} \cdot \left(\vec{R} \cdot \vec{B}\right)$ Gesamtdrehmoment; mit C := Kurve entlang der Leiterschleife, $\vec{b}$:= Länge parallel zur Drehachse und $\vec{R}$:= Radiusvektor

(3.10)

$\vec{M} = I \cdot \left(\vec{A} \times \vec{B}\right)$ gilt auch für beliebig geformte Leiterschleifen C

(3.11), (3.12) und (3.13)

$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{H}$ mit $\vec{m} := \mu \cdot I \cdot \vec{A} \cdot w$ und $\vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu}$;

mit $\vec{m}$:= magnetisches Moment, $\vec{H}$:= magnetische Feldstärke, μ := magnetische Permeabilität und w := Zahl der Windungen einer Spule; Einheit: $\left[\vec{H}\right] = A \cdot m$

3.3 Permanentmagnete

Ein Permanentmagnet besteht aus einem Material, in dem viele atomare Ringströme *gleichorientierte* magnetische Momente $\vec{m}_0$ beitragen. Die Orientierung des magnetischen Momentes ist von Süden nach Norden.

$\vec{M} = n \cdot \vec{m}_0$ Magnetisierung; mit n := Zahl der Ringströme pro Volumen; Die Orientierung ist von Süden nach Norden.

(i) Drehmoment auf Dauermagnet

$$\vec{M} = V \cdot \left(\vec{M} \times \vec{H}\right) = \vec{m} \times \vec{H}$$ (Experiment)

mit $\vec{m} = \vec{M} \cdot V$:= gesamtes magnetisches Moment und V := Volumen

=> Dauermagnete und Ringströme zeigen gleiches Verhalten!
=> Historische Definition des $\vec{H}$-Feldes

3.4 Quellenfreiheit der magnetischen Induktion

(i) Experimentelle Erfahrung

Es gibt keine magnetischen Ladungen bzw. Monopole, sondern nur höhere Multipole wie z.B. magnetische Dipole, Quadrapole etc.

(ii) Divergenzsatz

$$\int_{\partial V} \underbrace{\vec{D} \cdot d\vec{a}}_{\text{erzeugtes Feld}} = \underbrace{Q(V)}_{\text{Quellen}}$$ Elektrostatik; vgl. (1.17)

(3.14)

$$\int_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$$ Magnetostatik (der Wert dieses Integrals ist 0, da es keine magnetischen Monopole gibt!)

3.5 Erzeugung magnetostatischer Felder

(i) Ampèresches Durchflutungsgesetz

(3.15)

$$\oint_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \cdot I(A)$$ experimenteller Befund für alle (orientierbaren) Flächen A (im Vakuum!);

für magnetisierbare Materie gilt: $\int_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \underbrace{\mu_0 \cdot \mu_r}_{\mu} \cdot I(A)$

mit $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\Omega s}{m}$:= „magnetische Feldkonstante“ (auch: Vakuumpermeabilität) und μ_r := relative Permeabilität (Korrekturfaktor, dimensionslos). Im Vakuum gilt: $\mu_r = 1$.

(3.16) und (3.20)

$\mu := \mu_r \cdot \mu_0$ (absolute) Permeabilität $\kappa := \mu_r - 1$ magnetische Suszeptibilität

- Diamagnetismus (durch Induktion atomarer Ringströme):
  $\mu_r < 1$ bzw. $\kappa < 0$, aber $|\kappa| << 1$
- Paramagnetismus (paramagnetische Orientierung vorhandener atomarer magnetischer Dipole):
  $\mu_r > 1$ bzw. $\kappa > 0$, aber $|\kappa| << 1$
- Ferromagnetismus (magnetische Domäne, Weißsche Bezirke):
  $\mu_r >> 1$ bzw. $\kappa >> 1$

(ii) Magnetische Feldstärke und Kraftflussdichte

(3.17)

$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} = \mu_0 \cdot \vec{H} + \underbrace{\mu_0 \cdot \kappa \cdot \vec{H}}_{\text{induziertes Magnetfeld, gleich orientierte Ringströme}}$ mit $\vec{H}$:= magnetische Feldstärke und $\vec{B}$:= magnetische Kraftflussdichte

(3.18)

$\int\limits_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{r} = I(A)$ gilt in magnetisierbaren Medien.

Fazit: $\vec{H}$ hängt nur von dem erzeugenden Strom, nicht vom umgebenden Material ab!

(iii) Allgemeine Form des Durchflutungsgesetzes

(3.19)

$\int\limits_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{A} \vec{j} \cdot d\vec{a}$

(iv) Analogie zwischen Elektro- und Magnetostatik:

	E-Statik:	M-Statik:
Kraft wirkt auf: Art der Kraft: Symbol:	ruhende Probeladung elektrische Kraft $\vec{E}$	bewegte Probeladung Lorentzkraft $\vec{B}$
Bemerkung:	$\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind materialabhängige Größen!	

	E-Statik:	M-Statik:
Wirkung von: Gesetz: Symbol:	Ladungsverteilung ρ „Gauß“ $\vec{D}$	Stromverteilung $\vec{j}$ „Ampère“ $\vec{H}$
Bemerkung:	$\vec{D}$ und $\vec{H}$ sind nur von der Quelle abhängig!	

$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$ $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$ Materialgesetze

3.6 Berechnung magnetostatischer Felder und Kräfte aus stationären Stromverteilungen

3.6.1 Berechnung mit Hilfe des Ampèreschen Gesetzes

(i) Beispiel: unendlich langer, gerader Draht

(3.21)

$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \vec{e}_\varphi$ mit $\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

(3.22)

$\frac{d\vec{F}_{12}}{ds} = -\frac{\mu \cdot I_1 \cdot I_2}{2 \cdot \pi \cdot a} \cdot \vec{e}_{12}$ Kraft von Draht „1“ auf Draht „2“ pro Längeneinheit. Beide Drähte sind parallel und gerade. Sie werden in gleicher Richtung von den Strömen I_1 bzw. I_2 durchflossen. $\vec{e}_{12}$ weist von 1 nach 2. Es gilt: $|\vec{e}_{12}| = 1$

=> parallele Ströme ziehen sich an.

(ii) Beispiel: allgemeine zylindersymmetrische Stromverteilung

(3.23)

$\vec{H}(\vec{r}) = H(r)\cdot\vec{e}_\varphi$ wegen Symmetrie => $H_\varphi(r) = \frac{1}{r}\cdot\int_0^r j(r')\cdot r'\cdot dr'$

mit $\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cdot\cos(\varphi) \\ r\cdot\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$:= Zylinderkoordinaten

(iii) Spezialfall: gerader und unendlich langer Draht mit Radius a

$$j(r) = \begin{cases} \frac{I}{a^2\cdot\pi} & \text{für } 0 \le r \le a \\ 0 & \text{für } r>a \end{cases}$$

$$H_\varphi(r) = \begin{cases} \frac{I\cdot r}{2\cdot\pi\cdot a^2} & \text{für } 0 \le r \le a \\ \frac{I}{2\cdot\pi\cdot r} & \text{für } r>a \end{cases}$$

H_φ für $r>a$ verhält sich wie $\vec{H}$-Feld eines linienförmigen geraden Leiters!

3.6.2 Feldberechnung mit Hilfe des Biot-Savartschen Gesetzes

(i) Biot-Savartscher Satz

(3.24)

$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\cdot\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\cdot d^3r'$ durch gegebene Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$ erzeugtes Magnetfeld $\vec{H}(\vec{r})$

(ii) Spezialfall: Bei linienförmigen Stromleitern („Drähten")

(3.25)

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi}\cdot\int_C \frac{d\vec{s}\times(\vec{r}-\vec{s})}{|\vec{r}-\vec{s}|^3}$$

(iii) Beispiel: Magnetfeld eines Ringstromes (mit Radius a)

$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi}\cdot\int_0^{2\pi} \frac{(a^2-ra)\cdot\vec{e}_z + za\cdot\vec{e}_r(\varphi)}{|\vec{r}-\vec{s}(\varphi)|^3}\cdot d\varphi$ => elliptische Integrale für allgemeinen Aufpunkt $\vec{r} = (x,y,z)$

(3.26)

$\vec{H}(0,0,z) = \frac{I\cdot a^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(a^2+z^2)^3}}\cdot\vec{e}_z$ Spezialfall: $\vec{r}$ auf z-Achse

3.7 Magnetische Kreise

3.7.1 Magnetisierbarer Kern mit Luftspalt

Annahmen:

- Magnetfeld nur in Kern (Eisen) und Luftspalt (gute Näherung für $\mu_{Kern} >> 1$)
- keine Streufelder außerhalb, homogenes Feld innerhalb des Kerns

Das Magnetfeld wird durch eine stromdurchflossene Spule mit w Windungen erzeugt, welche um das Eisen gewickelt wurde.

(3.27)

$\left|\vec{B}_{Kern}\right| = \left|\vec{B}_{Spalt}\right| := B$ magnetische Kraftflussdichte

(3.28)

$\dfrac{\left|\vec{H}_{Spalt}\right|}{\left|\vec{H}_{Kern}\right|} = \dfrac{\mu_{Kern}}{\mu_{Spalt}} >> 1$ mit $\left|\vec{H}_{Spalt}\right| = \dfrac{B}{\mu_0 \cdot \mu_{Spalt}}$ und $\left|\vec{H}_{Kern}\right| = \dfrac{B}{\mu_0 \cdot \mu_{Kern}}$

(iii) Strom-Feld-Beziehung

(3.29)

$B = \dfrac{\mu_0 \cdot w \cdot I}{\dfrac{l_{Kern}}{\mu_{Kern}} + \dfrac{l_{Spalt}}{\mu_{Spalt}}}$ mit w := Windungszahl der Spule, l_{Kern} := Kernlänge und l_{Spalt} := Spaltbreite

3.7.2 Allgemeiner magnetischer Kreis

(i) Analogie: Elektrischer Stromkreis - magnetischer Stromkreis

siehe auch Skript „Elektrizitätslehre“ auf S. 109 - 112 (3.6.4 Vergleich zwischen magnetischen Kreisen und elektrischen Stromkreisen)

Analogie ist durch folgende Korrespondenzen gegeben:

$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} \Leftrightarrow \vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$: $\vec{j} \rightleftharpoons \vec{B}$, $\sigma \rightleftharpoons \mu$, $\vec{E} \rightleftharpoons \vec{H}$

$U = R \cdot I \Leftrightarrow V_m = R_m \cdot \Phi$: $U \rightleftharpoons V_m$, $R \rightleftharpoons R_m$, $I \rightleftharpoons \Phi$

$\int\limits_{Masche} \vec{E} \cdot d\vec{r} = U_e \Leftrightarrow \int\limits_{Masche} \vec{H} \cdot d\vec{r} = I \cdot w$: $U_e \rightleftharpoons I \cdot w$

Definitionen

(3.30)

$$\Phi(A) := \int_A \vec{B} \cdot d\vec{a}$$ magnetischer Kraftfluss

(3.31)

$$V_m := \int_{P_1}^{P_2} \vec{H} \cdot d\vec{r}$$ magnetische Spannung

Eventuell Wegabhängigkeit beachten! (es gibt im allgemeinen kein global definiertes magnetisches Skalarpotential!)

(3.32)

$$R_m = \frac{V_m}{\Phi} = R_{m\,Kern} + R_{m\,Spalt}$$ magnetischer Widerstand

(3.33)

$$R_{m\,j} = \frac{l_j}{\mu_j \cdot \mu_0 \cdot A_j}$$ magnetische Serienwiderstände; mit $\mu_j = \mu_0 \cdot \mu_{r_j}$:= Permeabilität

Kapitel 4: induzierte elektrische Felder und Spannungen

4.1 Bewegungsinduktion

(i) Leitfähiges Medium werde durch ein Magnetfeld $\vec{B}$ mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt

(4.1)

$\vec{E}_{ind} = \frac{\vec{F}_L}{q} = \vec{v} \times \vec{B}$ „induziertes" elektrisches Feld; mit $\vec{F}_L$:=Lorentzkraft, die eine im Medium ruhende Probeladung q sieht

(ii) Bewegte Leiterschleife mit der Fläche A

(4.2)

$U_{ind} = -\frac{d\Phi(A)}{dt}$ mit $\Phi(A) = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{a} = -B \cdot A$:= magnetischer Fluss

(4.3)

$U_{ind} = \int_{\partial A(t) = C(t)} \left(\vec{V} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt}\left(\int_{A(t)} \vec{B} \cdot d\vec{a}\right)$ gilt für zeitlich veränderliche Leiterschleife $\partial A(t)$ in zeitlich konstantem Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$

(iii) Unipolar-Maschinen

(4.4)

$U_{ind} = \int_0^a (\Omega \cdot B \cdot r) \cdot dr = \frac{1}{2}\Omega \cdot B \cdot a^2$ Barlowsches Rad; mit $\Omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ und a := Radius

4.2 Galvanomagnetismus (Hall-Effekt und Hallspannung)

Im leitfähigen, ruhenden Medium bewegen sich Ladungsträger mit der Ladung q und der Geschwindigkeit $\vec{v}$.

=> Lorentzkraft: $\vec{F}_L = q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$

=> „zusätzliches" $\vec{E}$-Feld: $\vec{E}_H = \frac{\vec{F}_L}{q} = \vec{v} \times \vec{B}$ mit $\vec{v} = \frac{1}{q \cdot n} \cdot \vec{j}$

=> Heuristisches Modell für Stromtransport: $\vec{j} = \sigma \cdot \left(\underbrace{\vec{E}_{el}}_{\text{Potentialgradient}} + \vec{E}_H\right) = \sigma \cdot \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$

(4.5)

$\vec{j} = \sigma \cdot \left(\vec{E} + R_H \cdot \vec{j} \times \vec{B}\right)$ rigorose Transporttheorie; mit $R_H = \underbrace{\text{Faktor}}_{\approx 0,7 \ldots 1,3} \cdot \frac{1}{q \cdot n}$

(4.6)

$U_H = \left|\vec{E}_H\right| \cdot d = R_H \cdot d \cdot \left|\vec{j}\right| \cdot \left|\vec{B}\right|$ Hallspannung; mit d := Dicke der Hallplatte

4.3 Ruheinduktion

(4.7) und (4.8)

$U_{ind} = -\frac{d}{dt}\cdot\Phi(A)$ und $U_{ind} = -\int_A \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{a}$ Leiterschleife $\partial A(t)$ (Fläche: A) ist zeitlich unverändert, $\vec{B} = \vec{B}(t)$

4.4 Allgemeine Form des Induktionsgesetzes

(4.9)

$U_{ind} = \int_{\partial A(t)} \vec{v}(\vec{r},t)\times\vec{B}(\vec{r},t)\cdot d\vec{r} - \int_{A(t)} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}(\vec{r},t)\cdot d\vec{a}$ Leiterschleife $\partial A(t)$ und Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r},t)$ zeitlich veränderlich

(4.10)

$$U_{ind} = -\frac{d}{dt}\Phi(A(t)) = -\frac{d}{dt}\int_{A(t)} \vec{B}(\vec{r},t)\cdot d\vec{a}$$

Interpretation: U_{ind} wird von induzierter Feldstärke $\vec{E}_{ind}$ längs $\partial A(t)$ erzeugt

(4.11)

$U_{ind} = \int_{\partial A(t)} \vec{E}_{ind}(\vec{r},t)\cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt}\int_{A(t)} \vec{B}(\vec{r},t)\cdot d\vec{a}$ (Maxwellsche Hypothese: $\partial A(t)$ kann auch immateriell sein!)

4.5 Induktivität

(i) Generelle Annahmen

- Ortsfeste Anordnung von Leiterschleifen (Spulen) $C_i\,(i = 1\ldots N)$, die von Strömen $I_i(t)$ durchflossen werden => nur Ruheinduktion
- Quasistationäre Änderung der Ströme: $\frac{dI_i}{dt}$ erzeugt keine Strahlungsfelder (*keine Antennen*)

(iii) Spule als Verbraucher

$$U = L\cdot\frac{dI}{dt}$$

(iv) Flussberechnung bei magnetisch gekoppelten Stromkreisen

(4.12)

$\psi_i(t) = \sum_{j=1}^{N} L_{ij}\cdot I_j(t)$ und $\psi_i(t) = w_i\cdot\Phi_i$ verketteter Kraftfluss; mit w_i := Windungszahl einer Spule i

(4.13)

$L_{ij} = L_{ji}$ mit $i, j = 1\ldots N$

Dabei gelten folgende Bezeichnungen:
- L_{ij} := *Induktivitätskoeffizienten*
- L_{ii} := Selbstinduktionskoeffizienten
- $L_{ij}, i \neq j$:= Gegeninduktionskoeffizienten

4.6 Transformatoren

(i) Leiterschleife

(4.14)

$U_i = R_i \cdot I_i + \sum_{j=1}^{N} L_{ij} \frac{dI_j}{dt}$ Transformatorgleichungen; mit R_i := Innenwiderstand; L_{ij} und R_i sind in Serienschaltung

(ii) Spezialfall: nur zwei Spulen (i,j=1…2), kein Innenwiderstand ($R_i = 0$)

(4.15)

$$U_1(t) = L_{11} \cdot \dot{I}_1(t) + L_{12} \cdot \dot{I}_2(t)$$
$$U_2(t) = L_{21} \cdot \dot{I}_1(t) + L_{22} \cdot \dot{I}_2(t)$$

(4.16)

$\left(\frac{U_2}{U_1}\right)_{I_2=0} = \frac{L_{21}}{L_{11}} = \frac{M}{L_1}$ Spannungsübersetzung

es gilt: $L_1 := L_{11}$, $L_2 := L_{22}$ und $M := L_{12} = L_{21}$

(4.17)

$\left(-\frac{I_2}{I_1}\right)_{U_2=0} = \frac{L_{21}}{L_{22}} = \frac{M}{L_2}$ Stromübersetzung

(4.18)

$K := \sqrt{\text{Spannungsübersetzung} \cdot \text{Stromübersetzung}} = \sqrt{\frac{M^2}{L_1 L_2}}$ Kopplungsfaktor: K ist ein Maß für das Verhältnis zwischen Sekundär- und Primärleistung

(iii) Berechnung für spezielle Geometrie: Dreischenkelkern

Knotenregel: $\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3 = 0$

Maschenregel: $R_{m1} \cdot \Phi_1 - R_{m3} \cdot \Phi_3 = I_1 \cdot w_1$ und $R_{m2} \cdot \Phi_2 + R_{m3} \cdot \Phi_3 = I_2 \cdot w_2$

mit w_i := Windungszahl der Spule i

(4.19a), (4.19b) und (4.19c)

$$L_{11} = L_1 = \frac{w_1^2}{N}\left(R_{m2} + R_{m3}\right)$$
$$L_{22} = L_2 = \frac{w_2^2}{N}\left(R_{m1} + R_{m3}\right)$$
$$L_{12} = L_{21} = M = \frac{w_1 w_2}{N} \cdot R_{m3}$$

(4.20)

$K^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2} = \frac{R_{m3}^2}{\left(R_{m2}+R_{m3}\right)\left(R_{m1}+R_{m3}\right)}$ Kopplungsfaktor $\left(0 \le K^2 \le 1\right)$

(4.21)

$$\left(\frac{U_2}{U_1}\right)_{I_2=0} = \frac{M}{L_1} = \frac{R_{m3}}{R_{m2}+R_{m3}} \cdot \frac{w_2}{w_1} = \underbrace{K \cdot \frac{w_2}{w_1}}_{\text{falls } R_{m2}=R_{m1}}$$ Spannungsübersetzung

(4.22)

$$\left(-\frac{I_2}{I_1}\right)_{U_2=0} = \frac{M}{L_2} = \frac{R_{m3}}{R_{m1}+R_{m3}} \cdot \frac{w_1}{w_2} = \underbrace{K \cdot \frac{w_1}{w_2}}_{\text{falls } R_{m1}=R_{m2}}$$ Stromübersetzung

4.7 Magnetostatische Feldenergie

(i) Energie einer stromdurchflossenen Induktivität

$U \cdot dt = L \cdot dI$

(4.23)

$$W_{mag} = \int_0^I L\hat{I} \cdot d\hat{I} = \frac{1}{2} L I^2$$ Energieinhalt bei Stromanstieg von $\hat{I} = 0$ bis $\hat{I} = I$

(4.24)

$$W_{mag} = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \psi I = \frac{1}{2 \cdot L} \cdot \psi^2$$ äquivalente Formulierung zu (4.23) wegen $\psi = w \cdot \Phi = L \cdot I$ (vgl. (4.12))

$$W_{mag} = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{1}{2} \cdot L_{ij} \cdot I_i \cdot I_j$$ gilt bei N gekoppelten Induktivitäten

$$W_{mag} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M \cdot I_1 \cdot I_2$$ Beispiel: Transformator ($N = 2$)

(ii) Energiedichte des Magnetfeldes (linearer Fall)

Das gesamte Magnetfeld werde im ferromagnetischen Spulenkern K geführt. Es gibt keine Streufelder
=> Maschenregel: $I \cdot w = V_m = |\vec{H}| \cdot l$

Das Magnetfeld wird von einer Spule mit w Windungen induziert, welche von dem Strom I durchflossen wird. Mit l wird die Bogenlänge des Kerns (es gilt: $\mu_{Kern} \gg 1$) bezeichnet.

Die magnetische Energie $W_{mag} = \frac{1}{2} |\vec{H}| \cdot |\vec{B}| \cdot V$ ($V = A \cdot l$:= Volumen, A := Querschnitt des Kerns) steckt gleichverteilt im Spulenkern mit der *Energiedichte* $w_{mag} = \frac{W_{mag}}{V}$.

(4.25) und (4.26)

$$w_{mag} = \frac{1}{2} \cdot \vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2} \mu \cdot |\vec{H}|^2 = \frac{1}{2\mu} \cdot |\vec{B}|^2$$ falls $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$ und $\mu = \text{const.}$

Kapitel 5: Elemente der Wechselstromlehre

Zeitlich periodische, insbesondere sinusförmige („harmonische“) Strom- und Spannungsverläufe sind technisch außerordentlich wichtig:

- Transformierbarkeit (=> Energieübertragung)
- Modellierbarkeit (=> Informationsübertragung)
- Anpassung an Generatoren und Motoren

5.1 Grundlegende Begriffe

5.1.1 Wechselspannungsgenerator

(i)

Erzeugungsprinzipien:

- in $\vec{B}$-Feld rotierende Leiter (kleine Frequenzen, hohe Leistung)
- Schwingkreis (hohe Frequenzen, kleine bis mittlere Leistungen)

(ii) Beispiel: rotierende Leiterschleife erzeugt induzierte Spannung $u(t)$

(5.1)

$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$ Phase mit Kreisfrequenz $\frac{d\varphi}{dt} = \omega = \text{const.}$

$\Phi(t) = \Phi_{max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$ magnetischer Fluss; mit $\Phi_{max} := A \cdot |\vec{B}|$ und A := Fläche der Leiterschleife

(5.2)

$u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$ induzierte Spannung; mit $\hat{U} = \omega \cdot \Phi_{max}$:= Scheitelwert (Amplitude) der Spannung

5.1.2 Kenngrößen sinusförmiger Wechselspannungen und -ströme

(5.3)

$u(t + kT) = u(t)$ mit T := Zeit für eine Periode und $k \in \mathbb{Z}$

5.1.3 Zeigerdiagramm

(i) Idee

(5.4)

$$\begin{pmatrix} \hat{U} \cdot \cos(\varphi(t)) \\ \hat{U} \cdot \sin(\varphi(t)) \end{pmatrix} =: \underline{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

Der Zeiger $\underline{\hat{U}} := \underline{u}(t = 0)$ hat die Länge $\hat{U}$ und den Drehwinkel φ_0

=> $\underline{\hat{U}}$ charakterisiert (bei fester Kreisfrequenz ω) den Spannungsverlauf $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$ eindeutig!

(ii) Allgemeine Zeigerdarstellung

$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) \rightleftharpoons \underline{\hat{U}} = \hat{U} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi_u) \\ \sin(\varphi_u) \end{pmatrix}$$

$$i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i) \rightleftharpoons \underline{\hat{I}} = \hat{I} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi_i) \\ \sin(\varphi_i) \end{pmatrix}$$

Wechselspannung und -strom werden in eindeutiger Weise einem Zeiger zugeordnet

(5.5)

$\underline{u}(t) = \underline{\underline{D}}(\omega t) \cdot \underline{\hat{U}}$ mit $\underline{\underline{D}}(\omega t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$:= Drehmatrix

(5.6)

$\underline{i}(t) = \underline{\underline{D}}(\omega t) \cdot \underline{\hat{I}}$

5.2 Wechselstromschaltungen mit linearen Bauelementen

5.2.1 Ohmscher Widerstand

(5.7a) und (5.7b)

$\hat{U} = R \cdot \hat{I}$ unter quasistationären Bedingungen, d.h. für nicht zu hohe Frequenzen

$\varphi_u = \varphi_i$

(5.8)

$\underline{\hat{U}} = R \cdot \underline{\hat{I}}$ Zeigerdiagramm

5.2.2 Induktivität („Spule") in Zeigerdarstellung

(5.9a) und (5.9b)

$\hat{U} = \omega \cdot L \cdot \hat{I}$ unter quasistationären Bedingungen

$\varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2}$

(5.10)

$\underline{\hat{U}} = \omega \cdot L \cdot \underline{\underline{D}}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \underline{\hat{I}}$ mit $\underline{\underline{D}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\dim(\omega \cdot L) = \frac{H}{s} = \frac{\Omega \cdot s}{s} = \Omega$

$\omega \cdot L \cdot \underline{\underline{D}}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ entspricht Widerstand mit Phasendrehung um $+\frac{\pi}{2}$ (*Blindwiderstand*, *Reaktanz*)

5.2.3 Kapazität („Kondensator")

(5.11a) und (5.11b)

$\hat{I} = \omega \cdot C \cdot \hat{U}$ unter quasistationären Bedingungen

$\varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2}$

(5.12)

$$\underline{\hat{U}} = \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot \underline{\underline{D}}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \underline{\hat{I}} \text{ mit } \underline{\underline{D}}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \ \dim\left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right) = \frac{s}{F} = \frac{s \cdot V}{A \cdot s} = \Omega$$

$\frac{1}{\omega \cdot C} \cdot \underline{\underline{D}}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ entspricht Widerstand mit Phasendrehung um $-\frac{\pi}{2}$ (*Blindwiderstand*, Reaktanz)

$\omega \cdot C \cdot \underline{\underline{D}}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ entspricht Leitwert mit Phasendrehung um $+\frac{\pi}{2}$ (*Blindleitwert*, Suszeptanz)

5.2.4 Parasitäre Elemente, Gültigkeit der quasistationären Näherung

$\omega \ll \min\left\{\frac{1}{L_p} \cdot \frac{|u_\alpha|}{|i_\alpha|}, \frac{1}{C_p} \cdot \frac{|i_\alpha|}{|u_\alpha|}\right\}$, also bei kleinen Frequenzen arbeiten, damit parasitäre Effekte vernachlässigt werden können. Typische Werte: $f \ll 1\text{MHz}$

mit L_p := Leitungsinduktivität, C_p := Leitungskapazität und $\alpha = R, L, C$

5.2.5 Kirchhoffsche Regeln bei quasistationären Bedingungen

(i) Momentanwerte am Zeitpunkt t (parasitäre Ströme und Spannungen vernachlässigbar)

(5.13) und (5.14)

$\forall_{t \in \mathbb{R}} \sum_k i_k(t) = 0$ am Knoten

$\forall_{t \in \mathbb{R}} \sum_k u_k(t) = u_e(t)$ längs Maschen; mit $u_e(t)$:= eingeprägte Spannungen

(ii) Zeigerdarstellung (falls alle Ströme und Spannungen sinusförmig)

(5.15) und (5.16)

$\sum_k \underline{\hat{I}}_k = 0$ $\sum_k \underline{\hat{U}}_k = \underline{\hat{U}}_e$ Kirchhoffsche Regeln in Zeigerdarstellung

5.3 Wechselstromrechnung mit Hilfe komplexer Zahlen

5.3.1 Komplexe Zahlen

(i) Komplexe Zahlen = Zeiger mit Addition und Multiplikation $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2, +, \cdot)$

$$\underline{U} + \underline{V} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 + V_1 \\ U_2 + V_2 \end{pmatrix} := \left(U_1 + V_1\right) + j \cdot \left(U_2 + V_2\right) \quad \text{Zeigeraddition}$$

$$\underline{U} \cdot \underline{V} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 V_1 - U_2 V_2 \\ U_1 V_2 + U_2 V_1 \end{pmatrix} = \left(U_1 V_1 - U_2 V_2\right) + j \cdot \left(U_1 V_2 + U_2 V_1\right) \quad \text{Zeigermultiplikation}$$

(ii) Satz: $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ist ein Körper

Es gelten für komplexe Zahlen dieselben Rechenregeln wie bei reellen Zahlen

(5.17)

$$j^2 = -1 \quad \text{mit } j := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(iii) Darstellung in Real- und Imaginärteil (= kartesische Koordinaten)

(5.18)

$$\underline{U} = U_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1} + U_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_2} = U_1 + j \cdot U_2$$

(iv) Darstellung in Polarkoordinaten

(5.19), (5.20a) und (5.20b)

$$\underline{Z} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = r \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi) = r \cdot e^{j\varphi}$$

mit $r = |\underline{Z}| := \sqrt{a^2 + b^2}$ (Länge des Zeigers $\underline{Z} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$) und $\varphi = \arg(\underline{Z}) = \arctan\frac{b}{a}$ ($0 \le \varphi \le 2\pi$)

(vii) Konjugiert komplexe Größe

$$\underline{Z}^* = a - jb = r \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi) = r \cdot e^{-j\varphi}$$ entspricht Spiegelung an reeller Achse!

es gilt: $|\underline{Z}^*| = |\underline{Z}|$ und $\underline{Z}^* \cdot \underline{Z} = |\underline{Z}|^2 = r^2 \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{-j\varphi}$

(viii) Berechnung von Quotienten („Nenner reell machen“)

$$\frac{\underline{U}}{\underline{V}} = \frac{\underline{U} \cdot \underline{V}^*}{\underline{V} \cdot \underline{V}^*} = \frac{\underline{U} \cdot \underline{V}^*}{\underline{V}^2}$$

5.3.2 Drehungen in $\mathbb{C}$; Eulersche Formel

(i) Komplexe Exponentialfunktion

(5.21)

$$e^{\underline{Z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \underline{Z}^n$$

$e^{\underline{Z}_1} \cdot e^{\underline{Z}_2} = e^{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$ für $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2 \in \mathbb{C}$

$e^{a+jb} = e^a \cdot (\cos(b) + j \cdot \sin(b))$ für $a, b_2 \in \mathbb{R}$

(5.22)

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j \cdot \sin\varphi$$ Eulersche Formel

(ii)

(5.23)

$\underline{Z} = |\underline{Z}| \cdot e^{j \cdot \arg(\underline{Z})}$

(5.24)

$\underline{d}(\varphi) = \cos\varphi + j \cdot \sin\varphi = e^{j\varphi}$ Form von komplexen Zeigern mit der Länge 1 („Einheitszeiger“); mit $0 \le \varphi < 2 \cdot \pi$

(iii)

Multiplikation von $\underline{d}(\varphi)$ mit $\underline{Z} \in \mathbb{C}$ ist Drehung von $\underline{Z}$ um Winkel φ im Gegenzeigersinn

(iv)

Drehungen in $\mathbb{R}^2(\mathbb{C})$ sind additiv:

- $\underline{d}(\varphi) \cdot \underline{d}(\psi) = e^{j\varphi} \cdot e^{j\psi} = \underline{d}(\varphi + \psi)$
- $\underline{\underline{D}}(\varphi) \cdot \underline{\underline{D}}(\psi) = \underline{\underline{D}}(\varphi + \psi)$ Matrixschreibweise; mit $\underline{\underline{D}}(\omega t)$:= Drehmatrix

5.3.3 Komplexe Zahlen als Drehstreckungen im $\mathbb{R}^2$

(i)

- Drehung um φ entspricht einer Multiplikation mit $e^{j\varphi}$
- Streckung um Faktor r entspricht einer Multiplikation mit r

=> Eine Drehstreckung entspricht einer Multiplikation mit $r \cdot e^{j\varphi}$

(ii)

Jede komplexe Zahl lässt sich als Drehstreckung im $\mathbb{R}^2$ auffassen und umgekehrt

(iii)

(5.25)

speziell gilt: $|\underline{Z} \cdot \underline{U}| = |\underline{Z}| \cdot |\underline{U}|$ für $\underline{Z}, \underline{U} \in \mathbb{C}$

5.3.4 Wechselstromzeigerdiagramm in komplexer Darstellung

(i) Spannungs- und Stromzeiger

(5.26) und (5.27)

$\underline{\hat{U}} = \hat{U} \cdot e^{j\varphi_u}$ $\underline{\hat{I}} = \hat{I} \cdot e^{j\varphi_i}$ Anfangswerte

(5.28) und (5.29)

$\underline{U}(t) = \underline{\underline{D}}(\omega t) \cdot \underline{\hat{U}} = e^{j\omega t} \cdot \underline{\hat{U}} = \hat{U} \cdot e^{j \cdot (\omega t + \varphi_u)}$

$\underline{I}(t) = \underline{\underline{D}}(\omega t) \underline{\hat{I}} = e^{j\omega t} \cdot \underline{\hat{I}} = \hat{I} \cdot e^{j \cdot (\omega t + \varphi_i)}$

Momentanwerte; der tatsächliche Spannungs- bzw. Stromverlauf entspricht dem Imaginärteil von $\underline{U}(t)$ bzw. $\underline{I}(t)$

(ii) Lineare Bauelemente

(5.30)

$\underline{\hat{U}} = \underline{Z} \cdot \underline{\hat{I}}$ Darstellung der linearen Bauelemente R, L und C (und Schaltungen hieraus) durch Drehstreckungen in $\mathbb{C}$, welche $\underline{\hat{U}}$ bzw. $\underline{\hat{I}}$ abbilden (komplexes Ohmsches Gesetz; mit $\underline{Z}$:= komplexer *Scheinwiderstand* (*Impedanz*))

(5.31) und (5.32)

$\hat{U} = |\underline{Z}| \cdot \hat{I}$ Scheitelwerte von $\underline{\hat{U}}$ und $\underline{\hat{I}}$; mit $|\underline{Z}|$:= reelle „*Impedanz*", „Scheinwiderstand"

$\varphi_u + \varphi_i = \arg(\underline{Z}) = \psi$ Phasendifferenz von $\underline{\hat{U}}$ und $\underline{\hat{I}}$

(5.33)

$\underline{\hat{I}} = \frac{1}{\underline{Z}} \cdot \underline{\hat{U}} = \underline{Y} \cdot \underline{\hat{U}}$ mit $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{|\underline{Z}|} \cdot e^{-j\psi}$:= „*komplexer Scheinleitwert*" („*komplexe Admittanz*")

(iii) Beispiele:

a) Ohmscher Widerstand

$\underline{Z} = R$ $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} = G$ $|\underline{Z}| = R$ $\varphi_u - \varphi_i = \arg(\underline{Z}) = 0$

b) Induktivität

(5.34)

$\underline{\hat{U}} = \underbrace{j\omega L}_{\underline{Z}} \cdot \underline{\hat{I}}$ $\underline{Y} = \frac{1}{j\omega L}$ $|\underline{Z}| = \omega L$ $\varphi_u - \varphi_i = \arg(\underline{Z}) = \frac{\pi}{2}$

c) Kapazität

(5.35)

$\underline{\hat{U}} = \underbrace{\left(\frac{1}{j\omega C}\right)}_{\underline{Z}} \cdot \underline{\hat{I}}$ $\underline{Y} = j\omega C$ $|\underline{Z}| = \frac{1}{\omega C}$ $\varphi_u - \varphi_i = \arg(\underline{Z}) = -\frac{\pi}{2}$

5.4 Einfache Wechselschaltungen aus R, L und C

5.4.1 R und L in Serie (RL-Glied)

(5.36)

$\underline{Z} = R + j\omega L$ Impedanz

$|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ Scheinwiderstand

$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$ allgemeine Serienschaltung von Impedanzen

(5.37a) und (5.37b)

$\hat{U}_e = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot \hat{I}$ Scheitelwert der eingeprägten Spannungsquelle

$\varphi_e - \varphi_i = \arg(\underline{Z}) = \arctan\frac{\omega L}{R}$ Phasendifferenz; es gilt: $0 \le \varphi_e - \varphi_i \le \frac{\pi}{2}$

Übungsaufgabe 30: Scheinleistung und Wirkleistung (R und L in Serienschaltung)[3]

$P_s = \frac{1}{2} \cdot \hat{U} \cdot \hat{I}$ Scheinleistung

$P_w = \frac{1}{2} \cdot \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \cos(\varphi)$ $P_B = \sqrt{P_S^2 - P_W^2}$ Wirkleistung P_w und Blindleistung P_B

5.4.2 R und C in Parallelschaltung (RC-Glied)

(5.38)

$\underline{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C = G + j\omega C$ Admittanz

$|\underline{Y}| = \sqrt{G^2 + \omega^2 C^2}$ Scheinleitwert

$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$ $\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2} = \underline{Y}$ Parallelschaltung zweier Impedanzen $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$

(5.39a) und (5.39b)

$\hat{I}_e = \sqrt{G^2 + \omega^2 C^2} \cdot \hat{U}_e$ $\varphi_i - \varphi_e = \arg(\underline{Y}) = \arctan\left(\frac{\omega C}{G}\right) = \arctan(\omega R C)$ mit $-\frac{\pi}{2} \le \varphi_e - \varphi_i \le 0$

5.4.3 Gedämpftes LC-Glied

$\underline{Z}_{RL} = R + j\omega L$ Serienschaltung von R und L

(5.40)

$\frac{1}{\underline{Z}} = \underline{Y} = j\omega C + \frac{1}{\underline{Z}_{RL}}$ Serienschaltung von R und L, beide in Parallelschaltung mit C (RL||C)

(5.41)

$$\underline{Y} = \frac{1 - \omega^2 L C + j\omega R C}{R + j\omega L}$$

(5.42)

$$|\underline{Y}| = \sqrt{\frac{1 + \omega^2 \cdot \left(R^2 C^2 - 2 L C\right) + \omega^4 L^2 C^2}{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

(5.43) und (5.44)

$$\arg(\underline{Y}) = \varphi_i - \varphi_e = \arctan\left(\frac{\omega R C}{1 - \omega^2 L C}\right) - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right) = \arctan\left\{\frac{1}{R} \cdot \left[\omega \cdot C\left(R^2 + \omega^2 L^2\right) - \omega L\right]\right\}$$ Phasendifferenz

5.5 Leistung und Effektivwerte

5.5.1 Momentane Leistung

(5.45)

$$p(t) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \cos(\varphi_u - \varphi_i)}_{\text{Mittelwert: } P_m} - \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)}_{\text{Mittelwert: } 0}$$

[3] Die Nummerierung bezieht sich auf die Aufgabensammlung vom Wintersemester 1998/1999. Diese ändert sich nahezu jährlich durch Austausch und Umsortierung einzelner Übungsaufgaben …

(5.46)

$$P_m = \frac{1}{2} \cdot \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \cos(\varphi_u - \varphi_i)$$ Mittelwert

Eine Schaltung enthält einen Energiespeicher ($\frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2$ bzw. $\frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$), falls $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i \neq 0$

5.5.2 Wirkleistung und Effektivwerte

(i) Def.

(5.47)

$$P_w := \frac{1}{T} \cdot \int_0^T p(t) \cdot dt = P_m = \frac{1}{2} \cdot \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \cos(\varphi_u - \varphi_i)$$ Wirkleistung

(5.48)

$$U_{eff} := \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(t)^2 \cdot dt}$$

(5.49)

$$I_{eff} := \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i(t)^2 \cdot dt}$$

(5.50) und (5.51)

$$U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \hat{U} \qquad I_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \hat{I}$$

(5.52)

$P_w = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi_u - \varphi_i) = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi)$ mit $\varphi := \varphi_u - \varphi_i$:= „relativer Phasenwinkel“;
oft wird „eff“ weggelassen!

(5.53)

$$\underline{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \underline{\hat{U}} \qquad \underline{I} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \underline{\hat{I}}$$ komplexe Effektivwerte

(ii) Komplexe Schreibweise für Leistung

(5.54)

$\underline{P} := \frac{1}{2} \cdot \underline{\hat{U}} \cdot \underline{\hat{I}}^* = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = P_w + j \cdot P_B$ komplexer Leistungszeiger; mit $\underline{\hat{U}} = \hat{U} \cdot e^{j\varphi_u}$ und $\underline{\hat{I}} = \hat{I} \cdot e^{j\varphi_i}$

(5.55) und (5.56)

$\underline{P} = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)$ $P_w = \mathrm{Re}(\underline{P})$; mit $\varphi := \varphi_u - \varphi_i$

es gilt auch: $\underline{P} = \frac{1}{2} \underline{u}(t) \cdot \underline{i}(t)^*$, da die Zeitabhängigkeit $\sim e^{j\omega t}$ wegfällt

(iii) Beispiele

a) ohmscher Widerstand

(5.57)

$P_w = U_{eff} \cdot I_{eff}$, also $\cos\varphi = 1$ mit $\varphi = 0$!

b) Spule

$P_w = \mathrm{Re}(\underline{P}) = 0$, also $\cos\varphi = 0$ mit $\varphi = \frac{\pi}{2}$!

c) Kondensator

$P_w = \mathrm{Re}(\underline{P}) = 0$, also $\cos\varphi = 0$ mit $\varphi = -\frac{\pi}{2}$!

5.5.3 Energiespeichernde Elemente

(i) Spule

(5.58)

$$p(t) = \frac{dW_{mag}}{dt} = \frac{1}{2}\omega L \hat{I}^2 \cdot \sin(2\omega t)$$

$$P_W = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = 0 \qquad \text{Wirkleistung}$$

(ii) Kondensator

(5.59)

$$p(t) = \frac{dW_{el}}{dt} = u(t)\cdot i(t) = -\frac{1}{2}\cdot\omega C \hat{U}^2 \cdot \sin(2\omega t)$$

$$P_W = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = 0$$

5.5.4 Scheinleistung und Blindleistung

(i) Leistungsbilanz bei linearen Elementen

(5.60)

$$\underbrace{p(t)}_{\substack{\text{zugeführte} \\ \text{(Netto-)} \\ \text{Leistung}}} = \underbrace{\mathrm{Re}(\underline{Z})\cdot i(t)^2}_{\substack{\text{Anteil an im} \\ \text{System verbrauchter} \\ \text{Leistung } \geq 0}} + \underbrace{\mathrm{Im}(\underline{Z})\cdot I^2_{eff}\cdot\sin(2\omega t)}_{\substack{\text{Zuwachs bzw. Abnahme an gespeicherter Energie} \\ \frac{dW}{dt}\geq 0 \text{ bzw. } \frac{dW}{dt}<0}}$$

(5.61)

$p(t) = R_w \cdot i(t)^2 + \frac{dW}{dt}$ *Leistungsbilanzgleichung* mit $R_w = \mathrm{Re}(\underline{Z})$ (Wirkwiderstand) und

$$\frac{dW}{dt} = \mathrm{Im}(\underline{Z})\cdot I^2_{eff}\cdot\sin(2\omega t)$$

(5.62)

$$P_W = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = R_w \cdot \frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2\,dt = \mathrm{Re}(\underline{Z}) \cdot I^2_{eff}$$ = mittlere verbrauchte Leistung ≥ 0

(ii) Blindleistung

(5.63)

$$P_B := \mathrm{Im}(\underline{Z}) \cdot I^2_{eff}$$ Blindleistung

(5.64)

$$p(t) = P_w \cdot (1 - \cos(2\omega t)) + P_B \cdot \sin(2\omega t)$$

(iv) Komplexe Zeigerdarstellung

(5.65a)

$$\underline{P} = \underline{Z} \cdot \left(\underline{I} \cdot \underline{I}^*\right) = \underline{Z} \cdot I^2_{eff}$$

(5.66)

$$\underline{P} = \underbrace{\mathrm{Re}(\underline{Z}) \cdot I^2_{eff}}_{P_w} + j \cdot \underbrace{\mathrm{Im}(\underline{Z}) \cdot I^2_{eff}}_{P_B}$$

(5.65b)

$$\underline{P} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \underline{U} \cdot \underline{Y}^* \cdot \underline{U}^* = \underline{Y}^* \cdot U^2_{eff}$$

(5.67)

$$P_s := |\underline{P}|$$ *Scheinleistung*

(5.68)

$$P_s^{\,2} = P_w^2 + P_B^2$$

(5.69)

$$P_s = \left|\underline{U} \cdot \underline{I}^*\right| = |\underline{U}| \cdot |\underline{I}| = U_{eff} \cdot I_{eff}$$

(5.70) und (5.71)

$P_w = P_s \cdot \cos\varphi$ $\quad$ $P_B = P_s \cdot \sin\varphi$ $\quad$ mit $\varphi := \varphi_u - \varphi_i$

(5.72)

$$\tan\varphi = \frac{\mathrm{Im}(\underline{Z})}{\mathrm{Re}(\underline{Z})}$$

5.5.5 Energieaustausch zwischen Kapazitäten und Induktivitäten im ungedämpften Schwingkreis

(i) Impedanz (Parallelschaltung von C und L)

(5.73)

$$\underline{\hat{U}}_e = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 L C} \cdot \underline{\hat{I}}$$ Scheitelwert der eingeprägten Spannungsquelle

(5.74) und (5.75)

$$\left|\underline{Z}(\omega)\right| = \frac{\omega L}{1-\omega^2 L C}$$

$$\varphi_u - \varphi_i = \begin{cases} +\frac{\pi}{2}, & \text{für} \quad \omega < \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{für} \quad \omega > \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases}$$

(ii) Leistung

$P_W = 0$ $\quad P_B = \frac{\omega L}{1-\omega^2 L C} \cdot I^2_{eff} = \frac{1-\omega^2 L C}{\omega L} \cdot U^2_{eff}$

Spezialfall: $P_B = 0$ für $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, d.h. LC-Glied nimmt überhaupt keine momentane Leistung auf ($p(t) \equiv 0$)

(iii) gespeicherte Energie

(5.76)

$W_L(t) = \frac{1}{2} L \cdot i_L(t)^2 = \frac{1}{2} L \cdot \hat{I}_L^2 \cdot \sin^2(\omega t)$ Energie in Spule

(5.77)

$W_C(t) = \frac{1}{2} C \cdot u(t)^2 = \frac{1}{2} C \cdot \hat{U}^2 \cdot \cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot C \cdot L^2 \cdot \hat{I}_L^2 \cdot \cos^2(\omega t)$ Energie in Kondensator

$W(t) = W_L(t) + W_C(t) = \frac{1}{2} L \cdot \hat{I}_L^2 \cdot \left(\sin^2(\omega t) + \omega^2 \cdot L \cdot C \cdot \cos^2(\omega t)\right)$ gespeicherte Gesamtenergie

(5.78a) und (5.78b)

$\frac{dW}{dt} = \hat{U} \cdot \hat{I}_L \cdot \left(1-\omega^2 L C\right) \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t)$ zeitliche Änderung der Gesamtenergie

$$\frac{dW}{dt} = \hat{U}^2 \cdot \frac{1-\omega^2 L C}{\omega L} \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t)$$

Spezialfall: $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (Resonanz): $W(t) = \frac{1}{2} L \cdot \hat{I}^2 = \frac{1}{2} C \cdot \hat{U}^2 = \text{const.} \Rightarrow \frac{dW}{dt} = 0$

$p(t) = \frac{dW}{dt} = \hat{U}^2 \cdot \frac{1-\omega^2 L C}{\omega L} \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t)$ zugeführte Leistung

Falls $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (Resonanzfall): $p(t) = 0$

=> es wird nur zwischen L und C Energie ausgetauscht (=> Schwingkreis)

5.6 Gedämpfter Schwingkreis - eine Fallstudie (LC-Parallelkreis; RL||C)

5.6.1 Resonanzverhalten bei erzwungener Schwingung

[vgl. (5.41) und Übungsaufgabe 30]

(i) komplexe Impedanz

(5.80)

$$\underline{Z}(\omega) = \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} = R \cdot \frac{1 + j\omega\tau_1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\omega\tau_2}$$ mit $\tau_1 := \frac{L}{R}$, $\tau_2 := RC$ und $\omega_0 := \frac{1}{\sqrt{LC}}$

(ii) Schweinwiderstand

(5.81)

$$\left|\underline{Z}(\omega)\right| = R \cdot \sqrt{\frac{1 + \omega^2\tau_1^2}{1 + \omega^2\left(\tau_2^2 - \frac{2}{\omega_0^2}\right) + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}}$$ mit ω_0 := Resonanzfrequenz im ungedämpften Zustand

(iii) Resonanzverschiebung

(5.82)

$$\omega_r = \omega_0 \cdot \sqrt{\sqrt{1 + 2\frac{\tau_2}{\tau_1}} - \frac{\tau_2}{\tau_1}}$$ mit ω_r := Resonanzfrequenz im gedämpften Zustand

(iv) Dämpfungsverhalten

(5.83)

$$\frac{R^2 \cdot C}{L} = \frac{\tau_2}{\tau_1} < 1 + \sqrt{2}$$ <=> reelle Resonanzfrequenz nur für $\sqrt{1 + 2\frac{\tau_2}{\tau_1}} \geq \frac{\tau_2}{\tau_1}$

Fazit: Bei erzwungenen Schwingungen gilt ...:

Widerstand	Dämpfung	Resonanzfrequenz	Impedanz
R=0	ungedämpft	$\omega_r = \omega_0$	hat Pol bei ω_0
$\frac{R^2C}{L} < 1 + \sqrt{2}$	unterkritisch	$0 < \omega_r < \omega_0$	hat Maximum $Z(\omega_r) > R$
$\frac{R^2C}{L} = 1 + \sqrt{2}$	kritisch	$\omega_r = 0$	$Z(\omega_r) = R$
$\frac{R^2C}{L} > 1 + \sqrt{2}$	überkritisch	kein ω_r	$Z(\omega) \leq R$

(v) Phasenwinkel

(5.84)

$$\varphi_u - \varphi_i = -\arctan\left[\omega \cdot (\tau_2 - \tau_1) + \omega^3 \cdot \frac{\tau_1}{\omega_0^2}\right] = -\arctan\left[f(\omega)\right]$$

(5.85)

$$\omega_R = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{R^2C}{L}}$$ Nulldurchgang der Phase

Es gilt:

- $\omega_R \le \omega_0$
- ω_R existiert nur für $\frac{R^2C}{L} \le 1$ (d.h. im unterkritischen Fall!)
- $\omega_R \le \omega_r$ (weil $1 - \frac{\tau_2}{\tau_1} \le \sqrt{1 + 2\frac{\tau_2}{\tau_1} - \frac{\tau_2}{\tau_1}}$)

5.6.2 Energiebilanz für erzwungene Schwingungen

(i) Leistung

(5.86)

$$P_W = \frac{R \cdot U_{eff}^2}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1}{1+\omega^2\tau_1^2} \cdot \frac{U_{eff}^2}{R}$$ Wirkleistung

(5.87)

$$P_B = \frac{\omega \cdot \left(\tau_1 - \tau_2 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \cdot \tau_1\right)}{1+\omega^2\tau_1^2} \cdot \frac{U_{eff}^2}{R}$$ Blindleistung

Es gilt:

- $P_W > 0$ (wegen des ohmschen Verlusts)
- Nullstellen von P_B: $\omega = 0$ und $\omega = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{\tau_2}{\tau_1}} = \omega_R$ (vgl. (5.85))
- Falls $\tau_2 > \tau_1 \left(\Leftrightarrow \frac{R^2C}{L} > 1\right)$: $P_B(\omega) < 0$ für alle ω
- Falls $\tau_2 \le \tau_1 \left(\Leftrightarrow \frac{R^2C}{L} \le 1\right)$: $P_B(\omega) = \begin{cases} > 0 & \text{für } 0 < \omega < \omega_R \\ < 0 & \text{für } \omega_R < \omega \end{cases}$

(ii) momentane Leistungs- und Energiebilanz

(5.88)

$$p(t) = \underbrace{P_R(t)}_{>0} + \underbrace{\frac{dW_L}{dt} + \frac{dW_C}{dt}}_{\ge 0 \text{ oder } < 0}$$ mit $P_R(t) = R \cdot i_{RL}(t)^2$:= ohmsche Verlustleistung

5.7 Transformator in komplexer Rechnung

5.7.1 Transformator-Gleichungen

$$u_k(t) = R_k + i_k(t) + \sum_{j=1}^{N} L_{kj} \cdot \frac{di_k}{dt}(t)$$

R_k und $L_{k1} \ldots L_{kN}$ sind in Reihenschaltung. Es gilt: $L_{kj} = L_{jk}$

(iv) komplexe Trafo-Gleichungen

(5.89)

$$\underline{U}_k = (R_k + j\omega L_{kk}) \cdot \underline{I}_k + \sum_{j \ne k}^{N} j\omega L_{kj} \cdot \underline{I}_j$$ komplexe Trafo-Gleichungen

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \vdots \\ \underline{U}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + j\omega L_{11} & j\omega L_{12} & \cdots & j\omega L_{1N} \\ j\omega L_{21} & R_2 + j\omega L_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ j\omega L_{N1} & \cdots & \cdots & R_N + j\omega L_{NN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \vdots \\ \underline{I}_N \end{pmatrix}$$ Matrixschreibweise

(v) Spezialfall: Trafo mit zwei Wicklungen (Primär- und Sekundärwicklung)

(5.90) und (5.91)

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & R_2 + j\omega L_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}$$ mit $L_1 := L_{11}$, $L_2 := L_{22}$ und $M := L_{12} = L_{21}$

entspricht der Widerstandsmatrix eines Zweitors (bzw. Vierpols):

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}$$ ($\underline{I}_1$ und $\underline{I}_2$ fließen in den Vierpol hinein)

5.7.2 Transformator mit sekundärseitigem Verbraucher

Schaltplan: siehe Skriptum „Elektrizitätslehre“ auf S. 221 (5.6.2 Sekundärseitig belasteter Transformator)

(5.92)

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 \cdot \frac{j\omega M \cdot \underline{Z}}{(R_1 + j\omega L_1)\cdot(\underline{Z} + R_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2}$$

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_1 \cdot \frac{\underline{Z} + R_2 + j\omega L_2}{(R_1 + j\omega L_1)\cdot(\underline{Z} + R_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2}$$

mit $\underline{U}_1$: Spannungsquelle; $\underline{Z}$: Impedanz des Verbrauchernetzwerks;

R_1 und L_1 bzw. R_2, L_2 und $\underline{Z}$ in Serienschaltung

(ii) Kenngrößen

(5.93)

$$\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right)_{\underline{I}_2=0} = \lim_{\underline{Z}\to\infty}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right) = \frac{\omega M}{\sqrt{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}}$$ Spannungsübersetzung

(5.94)

$$\left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}\right)_{\underline{U}_2=0} = \frac{\omega M}{\sqrt{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}}$$ Stromübersetzung

$$\sqrt{\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right)_{\underline{I}_2=0} \cdot \left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}\right)_{\underline{U}_2=0}} = \frac{\omega M}{\sqrt{(R_1^2 + \omega^2 L_1^2)\cdot(R_2^2 + \omega^2 L_2^2)}}$$ Kopplungsfaktor