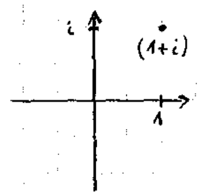
Funktionentheorie - SS 2003

- <u>Blatt 0:</u> $z = x+iy$; $z, w \in \mathbb{C}$

  - $\mathrm{Re}(z) = x$; $\mathrm{Im}(z) = y$
  - $\mathrm{Re}(z+w) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w)$; $\mathrm{Im}(z+w) = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(w)$
  - $\mathrm{Re}(az) = a \cdot \mathrm{Re}(z)$; $\mathrm{Im}(az) = a \cdot \mathrm{Im}(z)$ für $a \in \mathbb{R}$
  - $\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$;
  - $\overline{z} = x - iy$ $(z \neq 0)$
  - $\overline{w+z} = \overline{w} + \overline{z}$; $\overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \overline{z}$
  - $\overline{\overline{z}} = z$; $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$
  - $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$; $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$
  - $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$
  - $|z| \geq 0$, $|z| = 0$ für $z = 0$
  - $|w+z| \leq |w| + |z|$ (Dreiecksungleichung) ; $|w-z| \geq \big||w| - |z|\big|$
  - $|w \cdot z| = |w| \cdot |z|$
  - $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$; $\varphi = \arg z$
  - Multiplikation zweier komplexer Zahlen:
    - Beträge multiplizieren sich
    - Argumente addieren sich
  - $z = x + iy = |z| \cdot e^{j\varphi}$

z.B.: 

$z = 1+i = \sqrt{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$

Blatt 1:

Die Funktionen $f, g: U \to \mathbb{C}$ seien in $z_0 \in U$ komplex differenzierbar. Dann gilt:

- $f+g$ ist in z_0 komplex differenzierbar mit

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$$

- $f \cdot g$ ist in z_0 komplex differenzierbar mit

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$$

- $$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z_0) \cdot g'(z_0)}{g(z_0)^2} \quad \text{mit } g(z_0) \neq 0$$

- $$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{f(z_0)^2}$$

Polynome in z, $p(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$, sind auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktionen; es ist:

$$p'(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \nu\, a_\nu\, z^{\nu-1}$$

Blatt 2:

$f(z)$ ist für $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$; $x, y \in \mathbb{R}$ komplex differenzierbar, falls die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen erfüllt sind:

für $f(z) := g(z) + i\,h(z)$ muß gelten:

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad g_x(z) = h_y(z) \\ &(2)\quad g_y(z) = -h_x(z) \end{aligned}\right\} \quad \text{zusätzlich muß } f(z) \text{ auch reell differenzierbar sein}$$

damit $f(z)$ komplex differenzierbar, muß $f(z)$ ausschließlich aus komplex diff.baren Funktionen bestehen. Beispiel: $f(z) = \frac{u(z)}{v(z)}$ mit $v(z) \neq 0$

falls (2) und (3) erfüllt, gilt:

$$f(z) = \frac{\partial}{\partial x} g(x,y) + i\,h(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} h(x,y) - i \frac{\partial}{\partial y} g(x,y)$$

Blatt 3:

Konvergenzradius R einer Potenzreihe:

- Quotientenkriterium: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ bzw. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n}$

$$R = \frac{a_n}{a_{n+1}} \quad \text{für } n \to \infty$$

- Formel von Cauchy-Hamamard:

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt{|a_n|} \quad \text{für Potenzreihe } \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \text{ bzw. } \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n}$$

Auswahl wichtiger Grenzwerte:

$$\lim_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{a} = \lim_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{\nu} = \lim_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{a^{\nu}} = 1 \quad \text{für } a \in \mathbb{R}^+$$

$$\lim_{\nu \to \infty} \left(1 + \frac{k}{\nu}\right)^{\nu} = e^k \qquad \lim_{\nu \to \infty} \left(1 - \frac{1}{\nu}\right)^{\nu} = \frac{1}{e}$$

Blatt 4:

- elementare Funktionen, Zerlegung in Real- und Imaginärteil:
  siehe Springer-FS S. 340f. (2. Auflage)
- Vereinfachungen (gilt auch im Komplexen): Springer-FS S.124

Blatt 5:

- $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}\, f(t)\,dt + i \int_a^b \mathrm{Im}\, f(t)\,dt$
- $\int_a^b \overline{f(t)}\,dt = \overline{\int_a^b f(t)\,dt}$
- $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

- $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$

  mit $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$; $f: Sp\,\gamma \to \mathbb{C}$ stetige Funktion

- Tabelle von unbestimmten Integralen: Springer-TS S. 149 - 178

Blatt 6:

Cauchysche Integralformel:

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Weiter sei $D = D_r(z_0)$ eine relativ kompakte offene Kreisscheibe in G. (D ist positiv orientiert)

Dann gilt für jedes $z \in D$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} \quad \text{bzw.}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} \qquad (1)$$

∂D bzw. $|\zeta - z_0| = r$: positiv orientierte Kreisscheibe um z_0 mit Radius r.

(positiv orientiert := entgegen dem Uhrzeigersinn)

Ist f auf G holomorph und $D \subset\subset G$ eine Kreisscheibe, so gilt für jedes $z \in D$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int_{\partial D} \frac{f(\zeta) \cdot d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \quad \text{bzw.}$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta) \cdot d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \qquad (2)$$

Beispiele zu (1):

a) $$\int_{|z+1|=1} \frac{1}{(z+1)(z-1)^3}\, dz = \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z+1}\, dz = 2\pi i\, f(-1)$$

Cauchysche Integralformel

mit $f(z) = \frac{1}{(z-1)^3}$, da $-1 \in D_1(-1)$ [Kreis um -1 mit Radius 1]

b) $$\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+i}\, dz = \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-(-i)}\, dz = 2\pi i \cdot f(-i)$$

Cauchysche Integralformel

mit $f(z) = \sin(z)$

Beispiel zu (2):

$$\int_{|z-1|=1} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz = \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-1)^n}\, dz = 2\pi i \cdot \frac{f^{(n-1)}(1)}{(n-1)!}$$

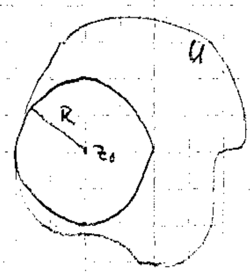
mit $f(z) = z^n$

Blatt 7:

Entwicklung einer Funktion $f = f(z)$, $z \in \mathbb{C}$ in eine Potenzreihe um $z_0 \in \mathbb{C}$ (Taylor-Reihe)

Satz: Sei $f: U \to \mathbb{C}$ auf offener Menge U holomorph, und $z_0 \in U$.

Dann ist f um z_0 in eine Potenzreihe entwickelbar:



$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Diese Reihe konvergiert lokal gleichmäßig im größten Kreis $D_R(z_0)$, der noch in U liegt.

Bekannte Reihen: • $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

$$e^z = e^{z_0 + z - z_0} = e^{z_0} e^{z - z_0} \leadsto \underline{e^z = e^{z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!}}$$

• $\frac{1}{1-f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} f(z)^n$; $f(z) < 1$ (innerhalb Definitionsbereich)

• $\frac{1}{[1-f(z)]^a} = \sum_{n=a}^{\infty} \frac{d^a}{dz^a} f(z)^n$; $f(z) < 1$ (innerhalb Def. bereich)

• Tabelle von Reihenentwicklungen: Springers mathematische Formeln S. 192 f. (2. Auflage)

Blatt 9:

Entwicklung einer Funktion $f = f(z)$, $z \in \mathbb{C}$ in eine Potenzreihe in einem ggs. Gebiet (Laurent-Reihe)

Satz: Sei f im Kreisring $A = \{ z \in \mathbb{C},\ r < |z-a| < R \}$ holomorph, dann gilt:

a, $f(z)$ läßt sich für alle $z \in A$ als Laurent-Reihe darstellen:

$$(1) \quad f(z) = \underbrace{\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z-a)^n}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n}_{\text{Nebenteil}}$$

b, die LR heißt konvergent in $z \in \mathbb{C}$, falls sowohl HT als auch NT in z konvergieren

c, die Koeffizienten a_n sind eindeutig bestimmt durch

$$(2) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{|\xi - a| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} \, d\xi \quad (n \in \mathbb{Z},\ r < \rho < R)$$

Anstatt a_n mit Hilfe von (2) zu berechnen, versucht man, die Laurent-Reihe auf bereits bekannte Reihen zurückzuführen (siehe Blatt 7)

- Isolierte Singularitäten:

Def.: Es sei z_0 ein Punkt der komplexen Ebene und f eine Funktion, die auf einer Umgebung von z_0 mit Ausnahme des Punktes z_0 selbst definiert und holomorph ist. Dann heißt z_0 isolierte Singularität von f.

Def.: Es sei z_0 eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion $f: U\setminus\{z_0\} \to \mathbb{C}$

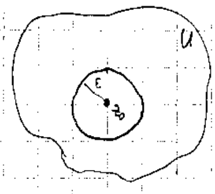
a) Ist f auf einer punktierten Umgebung $V\setminus\{z_0\} \subset U\setminus\{z_0\}$ von z_0 beschränkt, so heißt z_0 hebbare Singularität von f.

b) Ist $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$, so heißt z_0 Pol von f

c) Ist z_0 weder hebbare Singularität noch Pol von f, so heißt z_0 wesentliche Singularität

Satz: Sei z_0 isolierte Singularität von $f: U\setminus\{z_0\}$ mit Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \quad \text{für } k \in K_{z_0}(0,\varepsilon)$$



a) z_0 ist hebbare Singularität, falls $a_k = 0$ für $k<0$

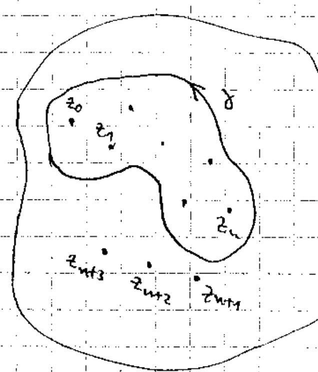
b) z_0 ist Pol der Ordnung n genau dann, wenn $a_{-n} \neq 0$ und $a_k = 0$ für $k<-n$

c) z ist wesentliche Singularität genau dann, wenn $a_k \neq 0$ für unendlich viele negative k gilt.

Blatt 10

- Residuensatz:

Sei f bis auf isolierte Singularitäten im Gebiet G holomorph, γ einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve in G, die endlich viele Singularitäten $z_1, \dots, z_n$ von f einschließt, aber selbst durch keine Singularität geht.



Dann gilt: $\boxed{\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z_k} f}$

f ist genau dann in z_0 holomorph, falls:

1, $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existiert

2, f reell differenzierbar und die Cauchy-Riemann-DGLn erfüllt sind:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{für } f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)}$$

(normalerweise am einfachsten zu zeigen)

3, f in Potenzreihe entwickelbar

- Satz: Sei $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ rationelle Funktion mit

a, Grad $q(x) \geq$ Grad $p + 2$

b, $z_1, \dots, z_N$ Nullstellen von q in $\mathrm{Im}\{z\} > 0$ ($\rightsquigarrow$ im oberen Halbebene)

c, $q(x) \neq 0$ für $x \in \mathbb{R}$ ($\rightsquigarrow$ keine Pole)

Dann gilt: $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathrm{res}_{z_i}\left(R(x)\right)}$

Integrale vom Typ $\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\,d\varphi$:

mit $\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $\sin z = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$, $dz = iz\,d\varphi$

Folgt: $\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\,d\varphi = \underbrace{\oint_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{iz}\,dz}_{\text{läßt sich über Residuensatz berechnen, falls keine Singularitäten auf dem Einheitskreis}}$

- Methoden der Residuenentwicklung:

1, das Residuum in einem einfachen Pol (Pol 1. Ordnung):

$$\mathrm{Res}_{z_i}(f) = \lim_{z \to z_i} (z - z_i) \cdot f(z)$$

Sonderfall: einfache Nennernullstelle:

$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$: $h(z_i) = 0$, $h'(z_i) \neq 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\mathrm{Res}_{z_i}(f(z)) = \frac{g(z_i)}{h'(z_i)}}$

2) das Residuum in einem m-fachen Pol:

$$\boxed{\mathrm{Res}_{z_i}(f) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_i} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \cdot \left[(z-z_i)^m \cdot f(z) \right]}$$

- Komplexer Logarithmus: $z = x+iy = r \cdot e^{i\varphi}$

a) $\ln(z) = \ln\left(r \cdot e^{i\varphi}\right) = \ln r + i\,(\varphi + 2\pi k) \quad k \in \mathbb{Z}$

b) $\ln(z) = \ln|z| + i \arg(z) \quad$ mit $\varphi_0 < \arg(z) \le \varphi_0 + 2\pi$

Hauptwert des Logarithmus:

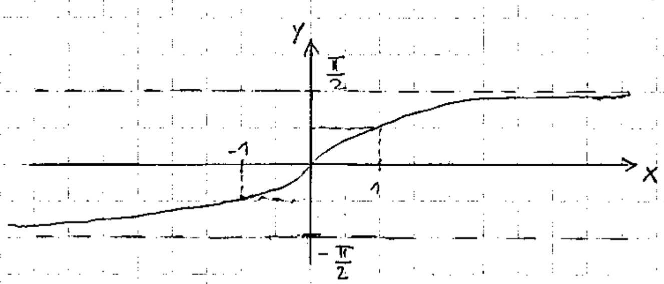
$$\mathrm{Ln}(z) = \ln \underbrace{|z|}_{x^2+y^2} + i\,\mathrm{Arg}(z) \quad \text{mit } -\pi < \mathrm{Arg}(z) \le \pi$$

Konkrete Berechnung:

$$\mathrm{Ln}\left[(x+iy)^n\right] = \ln(x^2+y^2) + i \cdot \underbrace{n \cdot \mathrm{Arg}_n(x+iy)}_{n \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi k}$$

$k \in \mathbb{Z}$ muß so gewählt werden, daß $n \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi k \in \left]-\pi, \pi\right[$

Außerdem gilt $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:



$y = \arctan x$