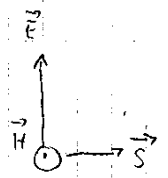


H.F

Elektromagnetisches Feld

$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z) \Rightarrow (H_x, H_y, H_z), (H_x, H_y, H_z)$



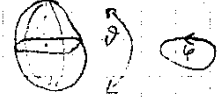
Übung 1, Aufg. 1

Poynting Vektor: $\vec{S}(\vec{x}, t) = \vec{E}(\vec{x}, t) \times \vec{H}(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \times \vec{H}_0 \\ E_x H_y - E_y H_x \\ E_y H_z - E_z H_y \\ E_z H_x - E_x H_z \end{pmatrix}$

E-Feld aufgrund Ladung q: $\oint_{\partial V=A} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho \, dV = q$ und $q = \int_{t_0}^t i(t) \, dt$
ideal: 0; kein Strom im Dielektrikum

H-Feld: $\int_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \frac{d}{dt} \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A} + \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$

$dA = e_x dy dz + e_y dz dx + e_z dx dy = e_r r d\varphi dz + e_\varphi dz dr + e_z r dr d\varphi$
 $= e_r r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi + e_\varphi r \cdot \sin \vartheta d\varphi dr + e_\varphi r dr d\vartheta$



$dV = dx dy dz = r \, dr \, d\varphi \, dz = r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$

$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{(dr)^2 + r^2 (d\varphi)^2 + dz^2} = \sqrt{dr^2 + r^2 (d\varphi)^2 + r^2 \sin^2 \vartheta (d\vartheta)^2}$



Leistung: $P = - \oint_{\partial V=A} \vec{S} \cdot d\vec{A}$ d. / magn. Energiedichte: $w_e = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{2} \vec{E}^2, w_m = \frac{\mu_0 \mu_r}{2} \vec{H}^2$; Energie: $W_{el/m} = \int_V w_{e/m} \, dV$
 $L = \frac{d}{dt} \int_V (w_e + w_m) \, dV$

$C = \frac{\epsilon \cdot A}{d}; C = \frac{q}{U}; P = U \cdot I$ Ges.: Parallelschwingkreis; besteht aus einer Induktivität L

Übung 2, Aufg. 2

(Spule aus N Windungen auf Ringkern; Querschnitt Kern: A_2 ; mittl. Weg Induktionslinien: l_m ; Kernmaterial: μ_r , Verlustwinkel δ_m , Widerstand R) und einer Kapazität C (Kondensator: Fläche A_1 , Plattenabstand d_1 ; ϵ_r ; Verlustwinkel des Dielektrikums δ_e)

Frequenz: f_0 bei Wechselspannung U_0

a) Admittanz $Y_C = j\omega C + G$ der Kapazität: $Y_C = \frac{I_C}{U_C}; I_C = \frac{dq}{dt} = j\omega q; q = \int_{\partial V} \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{A}$

$\Rightarrow Y_C = j\omega \epsilon \frac{A_1}{d_1}; \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r (1 - j \tan \delta_e) \Rightarrow Y_C = j\omega C + \omega C \cdot \tan \delta_e$

b) Impedanz der Induktivität $Z_L = j\omega L + R_v$: $Z_L = \frac{U_L}{I_L}$; Durchflutungsgesetz: $\oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = N \cdot I_L$

$U_L = -U_{ind} + I_L R_v$; Induktion: $U_{ind} = \int_{\partial A} \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{s} = \left(-\frac{d}{dt} \int_{A_2} \vec{B} \cdot d\vec{A} \right) \cdot N \Rightarrow U_{ind} = -j\omega \mu H A_2 N$

$\Rightarrow Z_L = R + \omega L \tan \delta_m + j\omega L; L = \frac{N^2 A_2 \mu}{l_m}; C = \frac{A}{\epsilon d}$

c) $\omega L \gg R_v$: Ersatzschaltbild: Parallelschwingkreis bestehend aus C, L, G; $G = G_v + (\omega L)^2$
in Gesamtschaltung

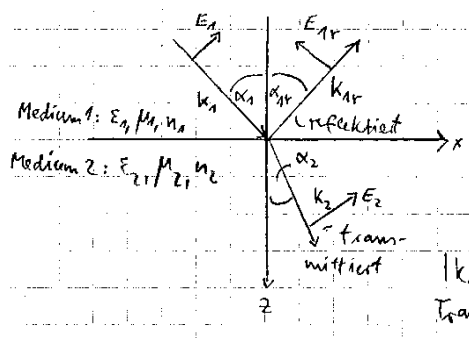
d) hineinfließende Scheinleistung: $P_s = \frac{1}{2} Y^* \cdot |U|^2; Y = G + j(B_C + B_L)$

e) durch Koaxiale Zuleitung fließende Scheinleistung: $P_s = \int_{\partial A} \vec{T} \cdot d\vec{A}$ mit $\vec{T} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^*$

$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$; ϵ_r const, Orientierung \perp Mantelfläche eines Zylinders mit Radius r und Länge l;

$\vec{E}_r: q = \int_{\partial V} \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi} \int_0^l \epsilon E_r r \, d\varphi \, dz = \epsilon E_r 2\pi r l \Rightarrow \vec{E}_r = \frac{q}{2\pi r l \epsilon}$
 $q: U = \int_{d/2}^{l/2} E_r \, dr = \frac{q}{2\pi \epsilon} \ln \frac{D}{d} \Rightarrow q = U \frac{2\pi \epsilon l}{\ln \frac{D}{d}} \Rightarrow \vec{E}_r = U \frac{1}{r \cdot \ln \frac{D}{d}}$

$\vec{H}_\varphi: I = \int_0^{2\pi} H_\varphi r \, d\varphi \Rightarrow H_\varphi = \frac{I}{2\pi r} \Rightarrow T_z = \frac{1}{2} \vec{E}_r \cdot \vec{H}_\varphi^*$

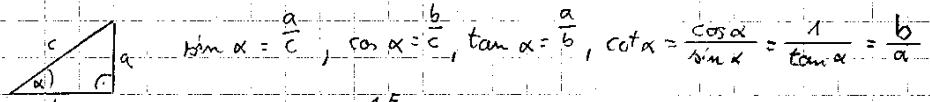


x-y-Ebene := Trennebene zweier homogener, isotroper, verlustfreier Medien 1 und 2.

am. $z < 0$ in x-z-Ebene linear polarisierte ebene Welle:
 $E_y = 0$ und $H_x = H_z = 0$

$|k_{1x}| = |k_{2x}|$: Reflektierte Welle: $\alpha_{r1} = \alpha_1$
 Transmittierte W.: $\sin \alpha_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_{1r} \mu_{1r}}{\epsilon_{2r} \mu_{2r}}} \cdot \sin \alpha_1$

rechte-Hand-Regel: Daumen: Ausbreitungsrichtung, E-Feld: Zeigefinger \Rightarrow H-Feld: Mittelfinger



Amplitude in $z=0$: $H_{1y} = E_1 \sin \alpha_1$; $E_{1x} = E_1 \cos \alpha_1$; $H_{1y} = \frac{E_1}{Z_{F1}}$; $Z_{F1} = \sqrt{\frac{\mu_{1r}}{\epsilon_{1r}}}$; M.S.W.

es gilt: $E_{2x} = E_{1x} - E_{rx}$ und $H_{1y} + H_{1ry} = H_{2y}$

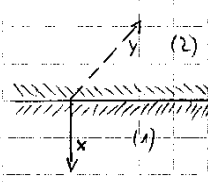
Amplitude refl. Welle: E_2 eliminieren \Rightarrow nach E_{1r} auflösen
 " transm. Welle: E_1 eliminieren \Rightarrow " E_2 " "

Transversal magnetische Oberflächenwelle: x-z-Ebene ist Trennebene zweier homogener Halbräume

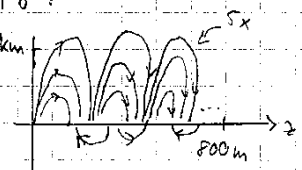
1 und 2 (ϵ_0, μ_0 für $x < 0$; ϵ, μ für $x > 0$), Entlang Grenzfläche in z-Richtung Ausbreitung einer T.M. Oberflächenwelle. r gilt für alle Metalle!

E.M. Oberflächenwelle. a) (1): Eisen: Quasileiter, da hohe Leitfähigkeit σ :
 $E' \ll E'' \Rightarrow E_1 \approx -j \frac{\sigma}{\omega}$

Materialdispersion / Verluste



Longitudinale Ausbreitungskoeffizienten γ :
 1. ohne Berücksichtigung der Grenzschicht:



$\gamma_{01}^2 = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_1 = -k_1^2 + \gamma_1^2 \Rightarrow \gamma_{01}^2 = j\omega \mu_0 \mu_r \sigma$, $\gamma_{02}^2 = \left(\frac{j\omega}{c_0}\right)^2$

Abschätzung: $\left(\frac{\gamma_{02}}{\gamma_{01}}\right)^2 = -\frac{j\omega \epsilon_0}{\mu_r \sigma} \ll 1$ und Taylor-Lin.: $(1 \pm x)^{0.5} \approx 1 \pm \frac{x}{2}$

$\Rightarrow \gamma = \frac{\omega^2 \epsilon_0 \mu_r}{2 c_0 \sigma} + j \frac{\omega}{c_0}$ (Re{ γ } ≥ 0); Ansatz: $\gamma^2 = \frac{\gamma_{02}^2 \gamma_{01}^2}{\gamma_{01}^2 + \gamma_{02}^2}$
 Wirkung: Dämpfung

transversale Ausbreitungskoeff.: $k_1^2 = \gamma_{01}^2 - \gamma^2 \approx j\omega \mu_0 \mu_r \sigma \Rightarrow k_1 \approx \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \mu_r \sigma}{2}} (1+j)$ (Eisen)

es gilt: $1-j = \frac{\sqrt{2}}{2} (1-j)$

$k_2^2 = \gamma_{02}^2 - \gamma^2 = \epsilon_0 \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{2\sigma}} \omega^{1.5} (1-j)$ gilt für Quasileiter

Eindringtiefe: $d_0 = \frac{1}{\text{Re}\{k_1\}}$; Grenzhöhe: $h_0 = \frac{1}{\text{Re}\{k_2\}}$; Flächenimpedanz: $Z_A = Z_{F1} = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \mu_r}{2\sigma}} (1+j)$

b) trockene Erde \rightarrow verlustbehaftetes Medium: $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r' + \frac{\sigma}{j\omega} = \epsilon_0 \epsilon_r' (1 - j \tan \delta_e)$

$\gamma_{01}^2 = \left(\frac{j\omega}{c_0}\right)^2 \epsilon_r' (1 - j \tan \delta_e)$; $\gamma_{02}^2 = \left(\frac{j\omega}{c_0}\right)^2$

$\gamma = \frac{j\omega}{c_0} \sqrt{\frac{\epsilon_r'}{\epsilon_r' + 1}} \cdot \left(1 - j \frac{1}{2(\epsilon_r' + 1)} \tan \delta_e\right)$

$k_1 \approx \frac{\omega \epsilon_r'}{c_0 \sqrt{\epsilon_r' + 1}} \left(j + \frac{1}{2} \frac{\epsilon_r' + 2}{\epsilon_r' + 1} \tan \delta_e\right)$; $k_2 = \frac{\omega}{c_0 \sqrt{\epsilon_r' + 1}} \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{\epsilon_r'}{\epsilon_r' + 1} \tan \delta_e - j\right)$

Re{ k_1 } und Re{ k_2 } muß immer positiv sein. Falls nicht, Vorzeichen tauschen!

TEM-Wellenleiter:

Charakterisierung durch Kapazitätsbelag C' , Induktivitätsbelag L' , Leitwertbelag G' und Widerstandsbelag R' .

-3-

a, verlustfreie Fall $\Rightarrow G' = 0$ und $R' = 0$

Ausbreitungskoeffizient: $\gamma = j\omega \sqrt{L' \cdot C'} = \alpha + j\beta$

Dämpfungskoeffizient: $\alpha = 0$

Phasenkoeffizient: $\beta = \omega \sqrt{L' \cdot C'}$

Phasengeschwindigkeit: $c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L' \cdot C'}}$

Gruppengeschwindigkeit: $v_g = \left(\frac{1\beta}{1\omega}\right)^{-1} = c \quad (\Rightarrow \text{keine Dispersion})$

Wellenwiderstand: $Z_w = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$

b, kleine Verluste zugelassen

b1, $f \geq 10 \text{ kHz}$: $G' \ll \omega C'$, $R' \ll \omega L'$:

$$\gamma = j\omega \sqrt{L' \cdot C'} \cdot \sqrt{1 - j \frac{R'}{\omega L'}} \cdot \sqrt{1 - j \frac{G'}{\omega C'}} \approx j$$

$$\approx j\omega \sqrt{L' \cdot C'} \cdot \left[1 - \frac{j}{2\omega} \cdot \left(\frac{G'}{C'} + \frac{R'}{L'} \right) + \frac{1}{8\omega^2} \cdot \left(\frac{G'}{C'} - \frac{R'}{L'} \right)^2 \right]$$

$$\alpha \approx \frac{1}{2} \sqrt{L' \cdot C'} \cdot \left(\frac{G'}{C'} + \frac{R'}{L'} \right); \quad \beta \approx \omega \sqrt{L' \cdot C'} \cdot \left[1 + \frac{1}{8\omega^2} \cdot \left(\frac{G'}{C'} - \frac{R'}{L'} \right)^2 \right]$$

$$c \approx \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{1}{\sqrt{L' \cdot C'}} \cdot \left[1 - \frac{1}{8\omega^2} \cdot \left(\frac{G'}{C'} - \frac{R'}{L'} \right)^2 \right]; \quad v_g \approx \frac{1}{\sqrt{L' \cdot C'}} \cdot \left[1 + \frac{1}{8\omega^2} \cdot \left(\frac{G'}{C'} - \frac{R'}{L'} \right)^2 \right]$$

$$Z_w = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \cdot \left[1 - \frac{j}{2\omega} \cdot \left(\frac{R'}{L'} - \frac{G'}{C'} \right) \right]$$

b2, $f < 10 \text{ kHz}$: $R' \gg \omega L'$, $G' \approx 0$:

$$\gamma \approx \sqrt{\frac{\omega R' C'}{2}} \cdot (1 + j); \quad \alpha = \beta \approx \sqrt{\frac{\omega R' C'}{2}}; \quad c \approx \sqrt{\frac{2\omega}{R' C'}}; \quad v_g \approx 2 \cdot \sqrt{\frac{2\omega}{R' C'}} \neq c$$

\Rightarrow TEM-Wellenleiter haben bei kleinen Verlusten und hinreichend hohen Frequenzen so gut wie keine Dispersion

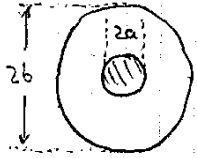
Feldtypen von Wellenleitern: L oder TEM-Moden: $E_z = 0, H_z = 0;$

H- oder TE-Moden: $E_z = 0, H_z \neq 0;$ E- oder TM-Moden: $E_z \neq 0, H_z = 0;$

Hybride Moden: $E_z \neq 0, H_z \neq 0$

Ausbreitungsrichtung: z

Koaxialleitung: $C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$; $L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$



$G' = \frac{2\pi\sigma}{\ln\frac{b}{a}} = \omega C' \tan \delta_e$ mit $C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\frac{b}{a}}$

$R' = \frac{R_A}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ mit $Z_A = \text{Re}\left\{\frac{M}{\epsilon}\right\} \approx \sqrt{\frac{\mu_0\omega}{2\sigma}}$

$\underline{y} = \alpha + j\beta = \omega \cdot \sqrt{L' \cdot C'} \cdot \left[j + \frac{1}{2} \left(\frac{G'}{\omega C'} + \frac{R'}{\omega L'} \right) \right]$
 $= \frac{\omega}{c} \cdot \left[j + \frac{1}{2} \left(\tan \delta_e + \frac{1}{2\sigma\omega\mu_0} \cdot \frac{a^{-1} + b^{-1}}{\ln\frac{b}{a}} \right) \right]$

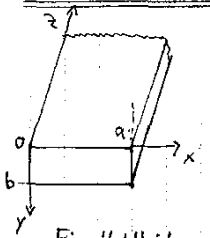
-4-

$Z_w = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \cdot \left[1 - \frac{j}{2} \left(\frac{R'}{\omega L'} - \frac{G'}{\omega C'} \right) \right]$; $\sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{Z_{F0}}{2\pi\sqrt{\epsilon_f}}$

te = H_{mn}-Modus!

Rechteck-Hohlwellenleiter (bei transversal elektrischen Wellen)

in Praxis: 1,25 f_c bis 1,9 f_c

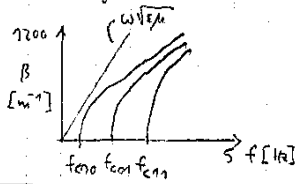


Seitenverhältnis $a:b = 2:1 \Rightarrow$ maximaler Wellenlängenbereich von f_c bis $2f_c$ für H₁₀-Modus

Grenzwellenlänge λ_c einer H_{mn}-Grundwelle: $\frac{2\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$; Grenzfrequenz: $f_c = \frac{c_0}{\lambda_c}$

Ein Hohlleitermodus ist nur dann ausbreitungsfähig, wenn die Wellenlänge im freien Raum $\lambda_0 < \lambda_c$ ist.

Achtung: E-Moden ($E_z \neq 0$) haben wg. $E_z \sim \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}$ keine E_{0n}- und E_{m0}-Moden!



Hohlleiterwellenlänge: $\lambda_H = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} \cdot \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} \cdot \frac{c_0}{f_c \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$

mit $\gamma = \frac{f}{f_c} = \frac{\lambda_c}{\lambda_0}$ und $\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\gamma^2 - 1}$

Phasenkoeffizient: $\beta = \frac{2\pi}{\lambda_H}$; Dämpfungskoeff.: $\alpha = j\beta = j \frac{2\pi f_c \sqrt{\epsilon_r\mu_r}}{c_0} \sqrt{\gamma^2 - 1}$

Verlustfreie Rechnung

Phasengeschwindigkeit: $c_H = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} \cdot \frac{c_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}}$; Gruppengeschwindigkeit: $v_{gH} = \left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega}\right)^{-1} = \frac{c_0^2}{\epsilon_r\mu_r} \frac{\beta}{\omega} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}$

es gilt: $c_H \cdot v_{gH} = \frac{c_0^2}{\epsilon_r\mu_r}$; Gruppenlaufzeit (Welle läuft in Zeit τ die Strecke L): $\tau = \frac{L}{v_{gH}}$

Transportleistung: $P = \text{Re}\left\{ \int_0^a \int_0^b T_z dy dz \right\}$
 mit $T_z = \frac{1}{2} (E_x H_y^* - E_y H_x^*)$

Wellenwiderstand: $Z_H = \frac{Z_F}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}}$ mit $Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$

Feldkomponenten: $E_x = j\omega\mu \left(\frac{u\pi}{b}\right) \cdot A \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{u\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$; $H_x = j\beta \left(\frac{m\pi}{a}\right) A \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{u\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$

$E_y = -j\omega\mu \left(\frac{m\pi}{a}\right) \cdot A \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{u\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$; $H_y = j\beta \left(\frac{u\pi}{b}\right) A \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{u\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$

$E_z = 0$; $H_z = \beta^2_{MC} A \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{u\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$; $\beta_{MC} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{u\pi}{b}\right)^2}$; $e^{x+jy} = e^x \cdot (e^{jy} = \cos y + j \sin y)$

Fortschreiten der Welle in negativer z-Richtung: $e^{-j\beta z} \rightarrow e^{j\beta z}$, $H_x \rightarrow -H_x$, $H_y \rightarrow -H_y$

Transversal magnetische Welle: $Z_E = Z_F \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}$ (Wellenwiderstand); $Z_E \cdot Z_H = Z_F^2$

$E_x = -j\beta \left(\frac{m\pi}{a}\right) B \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{u\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$; $H_x = j\omega\epsilon \left(\frac{u\pi}{b}\right) B \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{u\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$

$E_y = -j\beta \left(\frac{u\pi}{b}\right) B \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{u\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$; $H_y = -j\omega\epsilon \left(\frac{m\pi}{a}\right) B \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{u\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$

$E_z = \beta^2_{MC} B \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{u\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$; $H_z = 0$

Zur Berechnung notwendiges Integral:
 $\int_0^u \sin^2\left(\frac{m\pi x}{u}\right) dx = \frac{u}{2}$
 $\int_0^u \cos^2\left(\frac{m\pi x}{u}\right) dx = \frac{u}{2}$

(*) Eine Welle ist nur ausbreitungsfähig, wenn $f > f_c$ bzw. $\lambda < \lambda_c$. Für diesen Fall ist α rein imaginär und wird vernachlässigt, da nur der Realteil von α die Ausbreitung der Welle behindert.

für H_{mn} -Modus:
 Übung 5, Aufg. 3

Dämpfungskoeffizient α aufgrund der Wandstromverluste für $f > f_c$: (gemäß Skript S. 110; [4.164])

$$m=0, n \neq 0 (\Rightarrow \delta_{m0}=1, \delta_{n0}=0): \alpha = \frac{b \cdot R_A}{a \cdot Z_F} \cdot \frac{\frac{n^2}{b^2} \cdot \left(1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2\right) + \frac{n^2}{b^2} \cdot (2a+b) \cdot \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2} \cdot h^2}$$

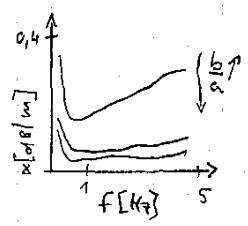
$$m \neq 0, n=0 (\Rightarrow \delta_{m0}=0, \delta_{n0}=1): \alpha = \frac{a \cdot R_A}{b \cdot Z_F} \cdot \frac{\frac{m^2}{a^2} \left(1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2\right) + \frac{m^2}{a^2} (a+2b) \cdot \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2} \cdot m^2}$$

$$m \neq 0, n \neq 0 (\Rightarrow \delta_{m0}=0, \delta_{n0}=0): \alpha = \frac{2 \cdot R_A}{a \cdot b \cdot Z_F} \cdot \frac{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \left(1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2\right) + \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \cdot (a+b) \cdot \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2} \cdot \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}$$

Sonderfall: $\alpha(H_{10}) = \frac{2 \cdot R_A}{b \cdot Z_F} \cdot \frac{\frac{1}{2} + \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}}$; $R_A = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2 \sigma}} = \sqrt{\frac{\pi \mu f}{\sigma}}$; $Z_F = Z_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}$

$R_A(\omega)$ hat mehr Einfluss auf α als Z_F

für den Dämpfungskoeffizienten des E_{mn} -Modus gilt (für $f > f_c$): $\alpha = \frac{2 \cdot R_A}{a \cdot b \cdot Z_F} \cdot \frac{\left(\frac{m}{a}\right)^2 \cdot b + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \cdot a}{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$



Übung 5,
 Aufgabe 4

idealer verlustfreier Rechteckhohlleiter:

$$f \leq f_c \Rightarrow \text{Dämpfungstyp: } \alpha = j\beta = j \frac{2\pi f_c \sqrt{\epsilon_r \mu_r}}{c_0} \sqrt{\nu^2 - 1} \text{ ist rein reell}$$

$$\Rightarrow \text{Dämpfung des Feldes längs einer Strecke } L \text{ in dB: } \alpha [dB] = 20 \cdot \log(e^{\alpha L})$$

$$f > f_c \Rightarrow \text{Wellentyp} \Rightarrow \text{keine Dämpfung (da } \alpha \text{ rein imaginär)}$$

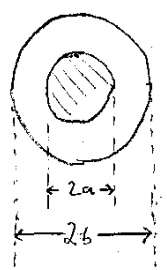
Übung 6, Aufg. 1

Übertragene Wirkleistung eines Rechteckhohlleiters im H_{mn} -Modus:

$$P = \begin{cases} \frac{a \cdot b}{8} \cdot Z_H \cdot \beta^2 \cdot \beta_{mc}^2 \cdot |A|^2 & \text{für } m \neq 0 \text{ und } n \neq 0 \\ \frac{a \cdot b}{4} \cdot Z_H \cdot \beta^2 \cdot \beta_{mc}^2 \cdot |A|^2 & \text{für } m \neq 0 \text{ und } n=0 \text{ oder } m=0 \text{ und } n \neq 0 \end{cases}$$

für E_{mn} -Modus gilt: $P = \frac{a \cdot b}{8 Z_E} \cdot \beta^2 \cdot \beta_{mc}^2 \cdot |B|^2$ (existiert nur für $m \neq 0$ und $n \neq 0$)

Dämpfung einer Koaxialleitung:



$$\alpha = \frac{\omega}{c} \cdot \left[\frac{1}{2} \left(\tan \delta_e + \sqrt{\frac{1}{2 \sigma \omega \mu}} \cdot \frac{1}{Z_0 \left(\frac{b}{a}\right)} \right) \right]$$

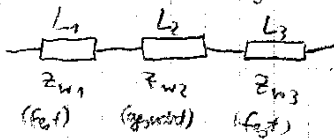
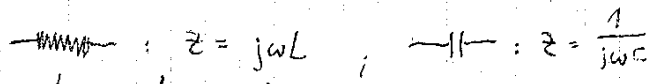
für TEM bzw. T-Welle

Übung 6, Aufg. 2

ggf. in z-Richtung orientierter, unendlich ausgedehnter Rechteckhohlwellenleiter, der mit der Frequenz f_0 im H_{mn} -Modus betrieben wird:

Randbedingungen: $E_{\tan} = 0 \Rightarrow \begin{cases} E_y = E_z = 0 & \text{für } x=0 \text{ und } x=a \\ E_x = E_z = 0 & \text{für } y=0 \text{ und } y=b \end{cases}$ für elektrisch leitende Wände;

$H_{\text{norm}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} H_x = 0 & \text{für } x=0 \text{ und } x=a \\ H_y = 0 & \text{für } y=0 \text{ und } y=b \end{cases}$ für magnetisch leitende Wände gilt $E_{\text{norm}} = 0$ und $H_{\tan} = 0$



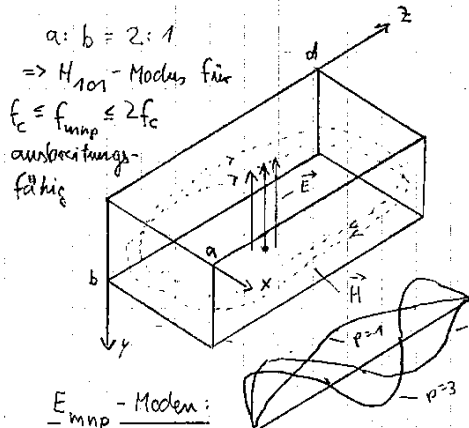
L_1 und L_3 sollen aneinander durch eine Ketten-schaltung mit L_2 angepasst werden. L_1 und L_3 sind verlustlos.

es gilt: $Z_{W3} = Z_{W2} \cdot \frac{Z_L + j Z_{W2} \tan \beta l}{Z_{W2} + j Z_L \tan \beta l}$; $Z_L = Z_{W1}$

für $\tan \beta l = \alpha$: $l = n \cdot \frac{\lambda}{4}$ ($n = 1, 3, 5, \dots$) ; $Z_{W2} = \sqrt{Z_{W3} \cdot Z_{W1}}$

quaderförmiger Hohlraumresonator:

Übung 9, Aufg. 1



$a : b = 2 : 1$
 $\Rightarrow H_{101}$ -Modus für
 $f_c = f_{mnp} \leq 2f_c$
 ausbreitungsfähig

$a = m \cdot \frac{\lambda_x}{2}$; $b = n \cdot \frac{\lambda_y}{2}$; $d = p \cdot \frac{\lambda_z}{2}$

Resonanzfrequenz: $\omega_{mnp} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \cdot \sqrt{\left(\frac{m \cdot \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n \cdot \pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p \cdot \pi}{d}\right)^2}$

Vakuumwellenlänge: $\lambda_{mnp} = \frac{\sqrt{\epsilon_r \cdot \mu_r}}{\sqrt{\left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2 + \left(\frac{p}{2d}\right)^2}} = \frac{c_0}{f_{mnp}}$

$\Rightarrow d = \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\epsilon_r \mu_r}{\lambda_{mnp}^2} - \left(\frac{m}{2a}\right)^2 - \left(\frac{n}{2b}\right)^2}}$ Zeichen der Feldlinienbilder für $t = \frac{T}{2}$ in einer Schnitt-ebene: reelle Darstellung von E_i in H_i ($i \in x, y, z$)
 $E_i = \text{Re}\{E_i \cdot u(\omega t)\}$; $H_i = \text{Re}\{H_i \cdot u(\omega t)\}$

E_{mnp} -Moden:

$E_x = -2\beta \cdot \left(\frac{m \cdot \pi}{a}\right) \cdot B \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \sin\left(\frac{p \cdot \pi \cdot z}{d}\right)$
 $E_y = -2\beta \cdot \left(\frac{n \cdot \pi}{b}\right) \cdot B \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \sin\left(\frac{p \cdot \pi \cdot z}{d}\right)$
 $E_z = 2 \cdot \beta_{Mc}^2 \cdot B \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \cos\left(\frac{p \cdot \pi \cdot z}{d}\right)$
 $H_x = 2j \cdot \frac{\beta}{Z_E} \cdot \left(\frac{n \cdot \pi}{b}\right) \cdot B \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \cos\left(\frac{p \cdot \pi \cdot z}{d}\right)$
 $H_y = -2j \cdot \frac{\beta}{Z_E} \cdot \left(\frac{m \cdot \pi}{a}\right) \cdot B \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \cos\left(\frac{p \cdot \pi \cdot z}{d}\right)$
 $H_z = 0$

H_{mnp} -Moden:

$E_x = 2\beta Z_H \cdot \left(\frac{n \cdot \pi}{b}\right) \cdot A \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \sin\left(\frac{p \cdot \pi \cdot z}{d}\right)$
 $E_y = -2\beta Z_H \cdot \left(\frac{m \cdot \pi}{a}\right) \cdot A \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \sin\left(\frac{p \cdot \pi \cdot z}{d}\right)$
 $E_z = 0$
 $H_x = 2j\beta \cdot \left(\frac{m \cdot \pi}{a}\right) \cdot A \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \cos\left(\frac{p \cdot \pi \cdot z}{d}\right)$
 $H_y = 2j\beta \cdot \left(\frac{n \cdot \pi}{b}\right) \cdot A \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \cos\left(\frac{p \cdot \pi \cdot z}{d}\right)$
 $H_z = -2j\beta_{Mc}^2 \cdot A \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \sin\left(\frac{p \cdot \pi \cdot z}{d}\right)$

$u = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$
 mit $\omega = 2\pi T^{-1}$
 ϵ : vorgegebene Variable

Randbedingungen an ideal elektrisch leitenden Wänden:
 $E_{tan} = 0$ und
 $H_{norm} = 0$

mit: $\beta = \frac{p \cdot \pi}{d}$; $Z_H = \frac{Z_F}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta c}{\omega}\right)^2}}$; $Z_E = Z_F \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\beta c}{\omega}\right)^2}$; $Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$; $\beta_{Mc} = \sqrt{\left(\frac{m \cdot \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n \cdot \pi}{b}\right)^2}$

Kopplung an Schaltung mit a , induktive Schleifen- oder d , Lochkopplung ; b ; kapazitive Stift- oder c , Lochkopplung

Verlustleistung P_V aufgrund endlicher Leitfähigkeit der Resonatorwände:

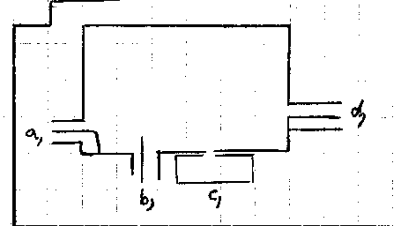
$P_{V mnp} = \frac{1}{2} \oint_{\partial V} R_A \cdot |H_z|^2 dA = \frac{1}{2} R_A \cdot 2 \cdot \left\{ \int_0^a \int_0^b (|H_x|^2 + |H_y|^2) dx dy + \int_0^a \int_0^b (|H_x|^2 + |H_z|^2) dy dz + \int_0^a \int_0^d (|H_x|^2 + |H_z|^2) dx dz \right\}$; $R_A = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \mu_r}{2\sigma}}$

zur Berechnung notwendig: $\int_0^a \sin^2\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{b}\right) dx = \int_0^a \cos^2\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{b}\right) dx = \frac{a}{2}$

für H_{101} -Modus gilt: $P_{V 101} = R_A \cdot A^2 \cdot \pi^4 \cdot \left(\frac{1}{ad} + \frac{2b}{ad^2} + \frac{d}{a^3} + \frac{2bd}{a^4}\right)$

Im Mittel gespeicherte Energie des Resonators: $\bar{W} = \int_V \frac{\epsilon'}{4} |E|^2 + \frac{\mu'}{4} |H|^2 dV = \int_V \frac{\epsilon'}{2} |E|^2 dV = \int_V \frac{\mu'}{2} |H|^2 dV$

$\epsilon' = \text{Re}\{\epsilon\}$; $\mu' = \text{Re}\{\mu\}$; für H_{101} : $\bar{W} = \frac{b \cdot d}{2a} \cdot \mu \cdot \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 \pi^2 A^2 \left[\int_V dV = \int_0^a \int_0^b \int_0^d dx dy dz \right]$



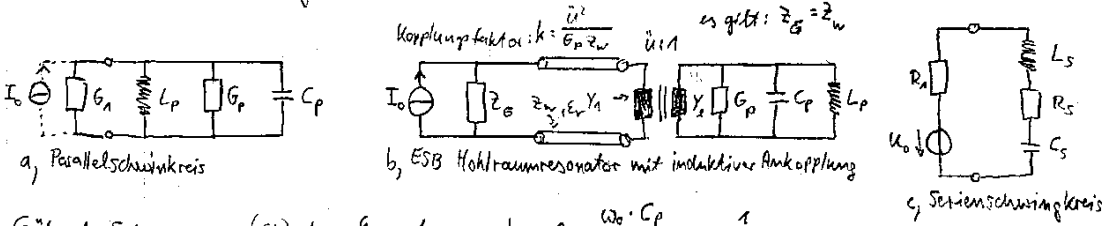
Güte eines Resonators: $Q = \frac{\omega \bar{W}}{P_V}$; für H_{101} -Modus: $Q = \frac{\pi \cdot Z_F}{2 \cdot R_A} \cdot \frac{b \cdot (a^2 + d^2)^{3/2}}{a \cdot d \cdot (a^2 + d^2) + 2b(a^3 + d^3)}$

Aufgabe 3; Skript 5.5 Anpassung von Schwingkreisen und Resonatoren:

- 7 -

λ in Z_w :

$z = \frac{Z_0}{f \cdot T_{eff}}$



Güte der Schwingkreise (SK) ohne Generator: a) b) $Q_0 = \frac{\omega_0 \cdot C_p}{G_p} = \frac{1}{\omega_0 \cdot L_p \cdot G_p}$

c) $Q_0 = \frac{\omega_0 L_s}{R_s} = \frac{1}{\omega_0 C_s \cdot R_s}$ ($\omega_0 C_i = \frac{1}{\omega_0 L_i}$)

externe Güte: a) $Q_{ext} = \frac{\omega_0 C_p}{G_1}$ b) $Q_{ext} = \frac{\omega_0 C_p Z_w}{\bar{u}^2} = \frac{Q_0 G_p Z_w}{\bar{u}^2}$ c) $Q_{ext} = \frac{\omega_0 L_s}{R_1}$

belastete Güte: $Q_L = \left(\frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{ext}} \right)^{-1} = \frac{Q_0 Q_{ext}}{Q_0 + Q_{ext}}$; Resonanzfrequenz: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_p C_p}} = \frac{1}{\sqrt{L_s C_s}}$

Je kleiner Q_{ext} , desto größer die durch Ankopplung des Schwingkreises an ein äußere Schaltung entstehenden Verluste:

$Q_{ext} > Q_0$: Unterkritische Kopplung (i) } im Smith-Diagramm: γ
 $Q_{ext} = Q_0$: Kritische Kopplung (ii)
 $Q_{ext} < Q_0$: überkritische Kopplung (iii) } PSK: SSK:

*, Def. 1

$v = \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$

$\approx 2 \cdot \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$
 (für $\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \ll 1$)

Admittanz eines Parallelschwingkreises: $Y_p = G_p + j \left(\omega C_p - \frac{1}{\omega L_p} \right)$ } (i) (ii) (iii)
 Impedanz eines Serienschwingkreises: $Z_s = R_s + j \left(\omega L_s - \frac{1}{\omega C_s} \right)$ } idealer Übertrager: $Z_1 = u^2 Z_2$; $Y_1 = \frac{1}{u^2} Y_2$

Abschluss einer Leitung mit einem Schwingkreis: PSK: $Q_{ext} = \omega_0 C_p Z_w$; SSK: $Q_{ext} = \frac{\omega_0 L_s}{Z_w}$

Admittanz PSK: $Y_p = \frac{Q_{ext}}{Q_0} (1 + j Q_0 v)$ Impedanz SSK: $Z_s = \frac{Q_{ext}}{Q_0} (1 + j Q_0 v)$

Reflexionsfaktor: $S_p = \frac{1 - Y_p}{1 + Y_p}$ $S_s = \frac{1 - Z_s}{1 + Z_s}$

v: Verstimmung (bei Resonanz: v=0); Y_p und Z_s auf Wellenwiderstand normiert.

3dB-Bandbreite: $\Delta f = \frac{f_0}{Q_0}$; 3dB-Grenzfrequenzen: $f_{+/-} = f_0 \pm \frac{\Delta f}{2}$ Normierung

*, für b) gilt: $Y_1 = \frac{1}{u^2} G_p (1 + j Q_0 v)$; v=0 und v=infinity einsetzen; $Z_1 = \frac{1}{Y_1} \Rightarrow Z_1 = \frac{Z_w}{Y_1} = \frac{1}{Y_1} Z_w$

normiertes Z_1 in Smith-Diagramm einzeichnen (für v=infinity $\Rightarrow Z_1 = 0$) \Rightarrow Kreis durch diese Punkte um Punkt $\frac{Z_{1,v=0} + Z_{1,v=\infty}}{2}$

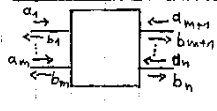
Übung 10

$S_{ij} = S_{ji}$ (Matrix symmetrisch)

\Rightarrow n-Tor Reziprozität

Verlustfreiheit, wenn gilt: $S^+ = S^-$ (Matrix unitär)

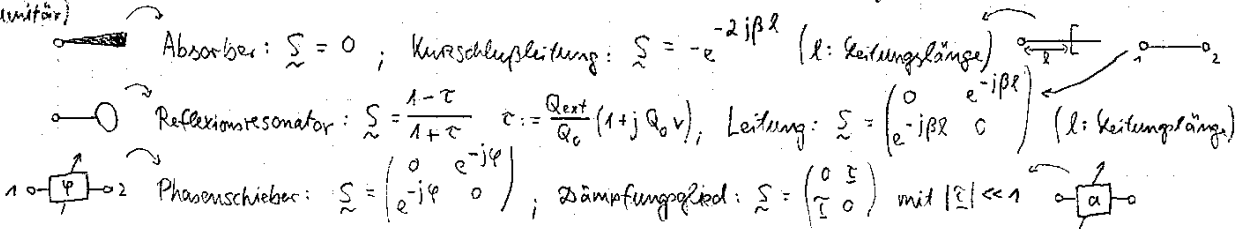
Wellenamplituden eines n-Tors:



- mit Reflexionsfaktor ρ_i abgeschlossen: $a_i = \rho_i \cdot b_i$
- wellenwiderstandsrichtig abgeschlossen: $a_i = 0$ wg. $\rho_i = 0$
- mit einem Kurzschluss abgeschlossen: $a_i = -b_i$ wg. $\rho_i = -1$
- im Leerlauf: $a_i = b_i$ wg. $\rho_i = 1$

$\underline{b} = \underline{S} \cdot \underline{a}$; \underline{S} : Streumatrix; Sei $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$; gesucht \underline{S} von Tor 3 und 4 $\Rightarrow \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \underline{S}_{3,4} \begin{pmatrix} b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$

Multiplikation von Matrizen: immer von rechts nach links! Leistung an Tor i ($i \geq n+1$): $= |b_i|^2$



Vollsymmetrische Parallel- bzw. Serienverzweigung: $\tilde{S} = \begin{pmatrix} \tilde{S} & \tilde{S} & \tilde{S} \\ \tilde{S} & \tilde{S} & \tilde{S} \\ \tilde{S} & \tilde{S} & \tilde{S} \end{pmatrix}$ $\tilde{S} = \pm \frac{1}{3} e^{-2j\beta l}$ $\tilde{S} = \pm \frac{2}{3} e^{-2j\beta l}$

Richtkoppler: $\tilde{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & +\sqrt{1-k^2} & \pm jk \\ 0 & 0 & \pm jk & +\sqrt{1-k^2} \\ \sqrt{1-k^2} & \pm jk & 0 & 0 \\ \pm jk & \sqrt{1-k^2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 3dB-Koppler: $\tilde{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \pm j \\ 0 & 0 & \pm j & 1 \\ 1 & \pm j & 0 & 0 \\ \pm j & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Hybridverzweigung (magisches T): $\tilde{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ allg.: $k = \frac{1}{\alpha}$ mit $\alpha = 10^{\frac{x}{20}}$ für x dB-Koppler $S_{ij} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \pm j \\ -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$ Phasenverschiebung um $\begin{Bmatrix} 0^\circ \\ 90^\circ \\ 180^\circ \end{Bmatrix}$ am Ausgang

Hertzische Dipol (in z-Richtung orientiert); Höhe: h; Kugelkoordinaten: $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Feldverteilung: $H_\varphi = \frac{h I_0}{4\pi r} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-jkr} \sin \vartheta$, $H_\vartheta = H_r = 0$; $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$

$E_r = \frac{h \cdot I_0}{2\pi j \omega \epsilon_0} \left(\frac{jk}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) e^{-jkr} \cos \vartheta$; $E_\vartheta = \frac{h \cdot I_0}{4\pi j \omega \epsilon_0} \left(\frac{-k^2}{r} + \frac{jk}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) e^{-jkr} \sin \vartheta$; $E_\varphi = 0$

* kann für Nahfeld ($kr \ll 1$) vernachlässigt werden.

Fernfeld: $E_\vartheta = \frac{j \omega \mu_0 h I_0}{4\pi r} e^{-jkr} \sin \vartheta$; $H_\varphi = \frac{jk h I_0}{4\pi r} e^{-jkr} \sin \vartheta$; $E_r = E_\varphi = H_r = H_\vartheta = 0$

Für das Fernfeld gilt: $\frac{E_\vartheta}{H_\varphi} = Z_{F0} = 377 \Omega$

Komplexer Poynting-Vektor: $\underline{I} = \frac{1}{2} (\underline{E} \times \underline{H}^*) \Rightarrow T_r = A \cdot \left(\frac{1}{(kr)^2} - \frac{j}{(kr)^3} \right) \sin^2 \vartheta$, $T_\varphi = 0$

$T_\vartheta = j 2 A \cdot \left(\frac{1}{(kr)^3} + \frac{j}{(kr)^2} \right) \cos \vartheta \sin \vartheta$; mit $A = \frac{k^4 I_0^2 h^2 Z_{F0}}{32 \pi^2}$, $Z_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$

Für Fernfeld gilt: $T_r = \frac{Z_{F0} k^2 h^2 |I_0|^2}{32 \pi^2 r^2} \sin^2 \vartheta$; $T_\vartheta = T_\varphi = 0$

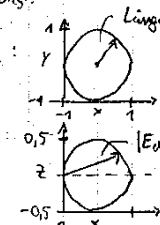
Scheinleistung: $P_S = \oint \underline{I} \cdot \underline{e}_r \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \Rightarrow P_S = 2\pi \cdot A \cdot \frac{4}{3} r^2 \cdot \left(\frac{1}{(kr)^2} - \frac{j}{(kr)^3} \right)$

Wirkleistung: $P_W = \frac{\pi}{3} \cdot Z_{F0} \cdot \left(\frac{h}{\lambda_0} \right)^2 \cdot |I_0|^2 = \text{Re} \{ P_S \}$; Strahlwiderstand: $R_S = \frac{2\pi}{3} \cdot Z_{F0} \cdot \left(\frac{h}{\lambda_0} \right)^2$

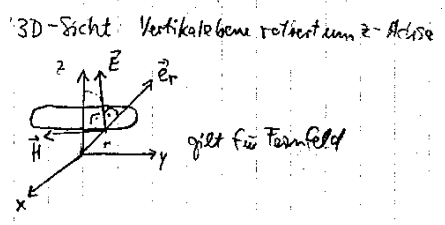
Richtwirkung: F_r ist bei einer Antenne die Richtungsabhängigkeit des Betrags der Hauptkomponente des elektrischen Feldes, bezogen auf den Maximalwert bei einem konstanten Radius:

$$F_r(\vartheta, \varphi) = \left| \frac{E(\vartheta, \varphi)}{E_{\max}} \right|_{r=\text{const.}}; \text{ hier: } E(\vartheta, \varphi) = E_\vartheta \Rightarrow F_r(\vartheta, \varphi) = |\sin \vartheta|$$

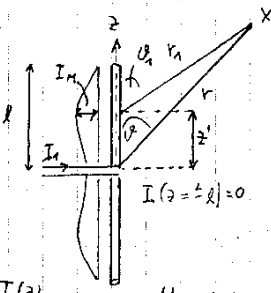
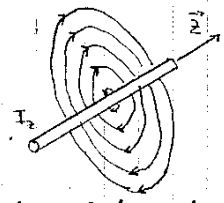
Horizontalebene: $\vartheta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow F_r = 1 = \text{const.}$



Vertikalebene: $\varphi = 0 \Rightarrow F_r = |\sin \vartheta|$



Lineare Strahler:



Stromverteilung auf dem Dipol: $I(z) = \begin{cases} I_m \sin[k \cdot (l-z)] & \text{für } z > 0 \\ I_m \sin[k \cdot (l+z)] & \text{für } z < 0 \end{cases}$ $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters: $H_\varphi(r, z) = \frac{I(z)}{2\pi r}$

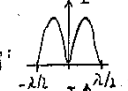
Hauptstrahlrichtung: $\varphi = 0^\circ$, $\vartheta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ (Äquatorialebene)

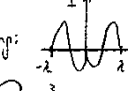
Übung 11
Annahme: $\mu = \mu_0$; $\epsilon = \epsilon_0$
(Antenne in Luft)
Der Strom I_0 wird durch eine Unterbrechung des Leiters eingefügte Stromquelle eingefügt.

E-Feld: $E_{\vartheta} = \frac{j Z_{F0} I_m}{2\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{\cos(kl \cos \vartheta) - \cos(kl)}{\sin \vartheta}$; H-Feld: $H_{\varphi} = \frac{E_{\vartheta}}{Z_{F0}}$; $k = \frac{\omega \mu_0}{Z_{F0}} = \frac{2\pi}{\lambda}$

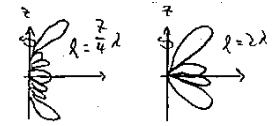
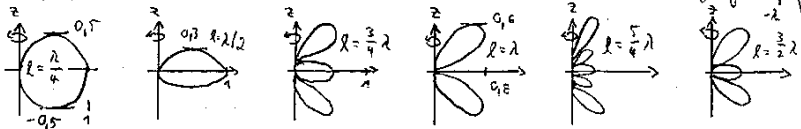
Richtcharakteristik: $F_R = \left| \frac{\cos(kl \cos \vartheta) - \cos(kl)}{\sin \vartheta} \right| = \left| \frac{Z}{N} \right|$; $Z' = kl \cdot \sin(kl \cos \vartheta) \cdot \sin \vartheta$; $N' = \cos \vartheta$

Nullstellen von F_R für: $\lambda = \frac{\lambda}{4}$: $z=0 \Rightarrow \vartheta=0, \pi$; $\vartheta=0 \Rightarrow z'=0, N'=1$; $\vartheta=\pi \Rightarrow z'=0, N'=-1$

$\lambda = \frac{\lambda}{2}$: $z=0 \Rightarrow \vartheta=0, \pi$; $\vartheta=0 \Rightarrow z'=0, N'=2$; $\vartheta=\pi \Rightarrow z'=0, N'=-2$ Strombelegung: 

$\lambda = \lambda$: $z=0 \Rightarrow \vartheta=0, \frac{\pi}{2}, \pi$; $\vartheta=0 \Rightarrow z'=0, N'=2$; $\vartheta=\pi \Rightarrow z'=0, N'=-2$ Strombelegung: 

Strahlungscharakteristik:



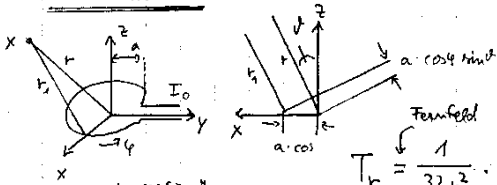
Komplexer Pointingvektor:

$$T_{\vartheta} = T_{\varphi} = 0; T_r = \frac{Z_{F0} \cdot |I_m|^2}{8\pi^2 r^2} \cdot \left[\frac{\cos(kl \cos \vartheta) - \cos(kl)}{\sin \vartheta} \right]^2$$

abgestrahlte Wirkleistung: $P = \frac{Z_{F0} \cdot |I_m|^2}{4\pi} \cdot f(kl)$; $f(kl) = \int_0^{\pi} (*) \cdot d\vartheta$

$R_{S_m} = 60 \cdot f(kl) \cdot \Omega$; $R_S = \frac{P_{S_m}}{\sin^2(kl)}$; für $\lambda/2$ -Dipol mit $\lambda = \frac{\lambda}{4}$ gilt: $R_S = R_{S_m} = 73,4 \Omega$; \uparrow auf I_m bezogen; \uparrow auf Speisepunkt der Antenne bezogen

Rahmenantenne



$H_{\vartheta} = -\frac{1}{4} k^2 a^2 I_0 \frac{e^{-jkr}}{r} \sin \vartheta$; $H_r = \frac{1}{2} j k a^2 I_0 \frac{e^{-jkr}}{r^2} \cos \vartheta$

$E_{\varphi} = -Z_{F0} \cdot H_{\vartheta} \Rightarrow F_r = |\sin \vartheta|$; $T_r = \frac{1}{2 Z_{F0}} \cdot |E_{\varphi}|^2$

$T_r = \frac{1}{32\pi^2} \cdot Z_{F0} k^4 a^4 |I_0|^2 \sin^2 \vartheta$; $E_{\varphi} = \frac{k a^2 I_0}{4\omega \epsilon_0} \left(\frac{k^2}{r} + 2 \frac{1}{r^3} \right) \cdot e^{-jkr} \sin \vartheta$

Gewinn: $G_S = \frac{Re\{T_r\} \cdot 4\pi r^2}{P_S} = \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta$; wirksame Antennenfläche: $A_w = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot G$

Sendeleistung einer Antenne: $P_S = \frac{\pi}{12} \cdot Z_{F0} k^4 a^4 |I_0|^2$; $R_S = \frac{Z_P}{|I_0|^2} = \frac{\pi}{6} Z_{F0} k^4 a^4$

Die Dipolantenne hat im Fernfeld eine magnetische Feldkomponente in φ Richtung mit einem Maximum bei $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Für maximalen Empfang muß Rahmen von abgestrahlten H-Feldlinien optimal überdeckt werden $\Rightarrow e_{\varphi} = n$ (n: Flächennormalenvektor)



Übung 12: allg. Antennen

Abstand zw. Sender \rightarrow Empfänger groß \Rightarrow ebene, homogene Welle fällt beim Empfänger ein.

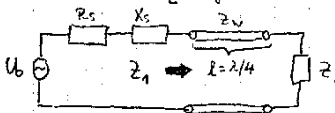
Empfangsleistung:

$$P_E = A_{wE} \cdot Re\{T_r\} = A_{wE} \cdot G_S \cdot P_S \cdot \frac{1}{4\pi r^2}$$

Aufgabe 2

Eine Antenne (Eingangswiderstand: $R_S + jX_S$) mit wirksamer Antennenfläche A_w werde über ein Kabel (Z_w , Länge l) an einen Verbraucher Z_L angeschlossen. Das empfangene Signal hat die Amplitude E (dim: $\frac{V}{m}$).

ESB:



max. empfangbare Leistung: $P_{var} = A_w \cdot Re\{T\} = A_w \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{Z_{F0}} \cdot |E|^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{U_0}{2} \right)^2 \cdot R_S$
für $Z_L = Z_w^* / Z_{Ant}^*$; $Z_{Ant} = R_S + jX_S$; bei Leistungsanpassung gilt $Z_{Ant}^* = Z_L$

P in Abhängigkeit von Z_L : $P = \frac{1}{2} R_i \cdot |I_{ges}|^2 = \frac{1}{2} \frac{R_i \cdot U_0^2}{(R_S + R_A)^2 + X_S^2}$ mit $R_A = Re\{Z_L\} = \frac{Z_w^2}{Z_L}$ und $I_{gs} = \frac{R_i \cdot U_0^2}{R_S + jX_S + R_A}$

Klemmenspannung U_0 : $U_0 = 2 \cdot \sqrt{2 \cdot P_{max} \cdot R_S}$; U_0 teilt sich genau zur Hälfte auf den Innenwiderstand und die an den Ausgangsklemmen anliegende Last auf.

Da $\frac{\lambda}{4}$ -Leitung verlustlos, wird die am Beginn der Leitung eingespeiste Wirkleistung am Ende der Leitung vollständig an der Last abgegeben.

Empfangsantenne: effektive Antennenfläche $A_{eff} = \frac{|U_0|^2}{|E|^2}$

Strombelegung für $\lambda = \frac{\lambda}{4}$:

