Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Überarbeitet Fassung vom 02. März 2003
TU-München: Elektro- und Informationstechnik; Höhere Mathematik IV– SS 2002
(URL: *http://studium.simonblank.de1.cc/*)

Die *bedingten Wahrscheinlichkeit* ist definiert als die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A unter der Bedingung, daß ein anderes Ereignis B mit $P(B) \neq 0$ bereits eingetreten ist. Sie wird mit $P(A \mid B)$ bezeichnet und heißt *W. von A unter der Bedingung B*. Da sich die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A i. allg. ändert, wenn bereits bekannt ist, daß ein anderes Ergebnis B eingetreten ist, so ist $P(A \mid B)$ i. allg. verschieden von $P(A)$. Wird z. B. mit zwei Würfeln gleichzeitig gewürfelt, ist B das Ereignis „Augensumme gerade“ und A das Ereignis „Augensumme mindestens 10“, so gibt es, nachdem B eingetreten ist, noch 18 mögliche Ausgänge, z. B. ist (1,1) möglich, (1,2) aber nicht. Günstig für A sind dann (4,6), (6,4), (5,5), (6,6). Also ist $P(A \mid B) = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$.

Sind zwei Urnen vorhanden, von denen die erste 5 schwarze und 5 weiße Kugeln, die zweite 1 weiße und 9 schwarze Kugeln enthält, so soll der Versuch darin bestehen, blindlings eine Urne zu wählen und dann daraus blindlings eine Kugel zu ziehen. Ist dann B das Ergebnis „die gezogene Kugel ist weiß“ und sind A_i die Ereignisse „die Kugel wurde aus der i-ten Urne (Ereignisraum Ω: i = 1,2) entnommen“, so ist $P(A_1 \mid B) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ und $P(A_2 \mid B) = \frac{1}{10}$. Dabei lassen sich folgende Formeln herleiten:

$$\text{(1)} \quad P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad\qquad \text{(2)} \quad P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

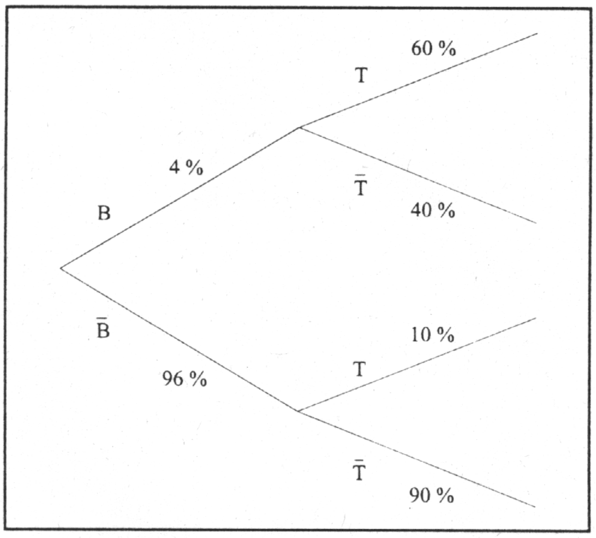
Die *Bayes*-Formel

Beispiel: Leistungskurs Mathematik 1996, Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik III

Die Fernsehsendung „Sport TV“ berichtet über das Sportgeschehen.
1. Bei „Sport TV“ treten Bildstörungen mit 4% Wahrscheinlichkeit auf. Ist das Bild gestört, so kommt es mit 60% Wahrscheinlichkeit auch noch zu Tonstörungen. Ist das Bild einwandfrei, so ist auch der Ton mit 90% Wahrscheinlichkeit in Ordnung. Verwenden Sie folgende Bezeichnungen:
B: „Bei ´Sport TV´ treten Bildstörungen auf“,
T: „Bei ´Sport TV´ treten Tonstörungen auf“.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein einwandfreies Bild, falls der Ton gestört ist?

Es handelt sich um ein Umkehrproblem: Aus bekanntem $P(B|\overline{T})$ soll das unbekannte $P(\overline{B}|T)$ berechnet werden.
Wegen $P(\overline{B}|T) = \frac{P(\overline{B} \cap T)}{P(T)}$ wäre das Problem gelöst, wenn die Wahrscheinlichkeiten $P(T)$ und $P(\overline{B} \cap T)$ bekannt wären.

1. Lösung mit Hilfe eines Baumdiagrammes:



$P(B \cap T) = 0{,}04*0{,}6 = 0{,}024$

$P(B \cap \overline{T}) = 0{,}04*0{,}4 = 0{,}016$

$P(\overline{B} \cap T) = 0{,}96*0{,}1 = 0{,}096$

$P(\overline{B} \cap \overline{T}) = 0{,}96*0{,}9 = 0{,}864$

Dem Baum entnimmt man:

$P(T) = P(B \cap T) + P(\overline{B} \cap T) = 0{,}04*0{,}6+0{,}96*0{,}1 = 0{,}12$ (2. Pfadregel)

$P(\overline{B} \cap T) = 0{,}96*0{,}1 = 0{,}096$ (1. Pfadregel)

$$\Rightarrow P(\overline{B}|T) = \frac{P(\overline{B} \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}096}{0{,}12} = 0{,}8 = 80\%$$

Die Wahrscheinlichkeit für ein einwandfreies Bild, falls der Ton gestört ist, beträgt 80%.

2. Lösung mit Hilfe einer Vierfeldertafel:

Man erhält eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel in 3 Schritten:
1. Schritt: Eintragen des gegebenen P(B) und damit auch von $P(\overline{B})$ = 1-P(B).
2. Schritt: Ausfüllen der Felder für $P(B \cap T)$ und $P(\overline{B} \cap \overline{T})$ mit Hilfe der gegebenen bedingten Wahrscheinlichkeiten und des Produktsatzes
3. Schritt: Berechnung der restlichen Werte durch Addition und Subtraktion

1)

	T	$\overline{T}$	
B			0,04
$\overline{B}$			0,96

2)

	T	$\overline{T}$	
B	0,04*0,60		0,04
$\overline{B}$		0,96*0,90	0,96
			1

3)

	T	$\overline{T}$	
B	0,024	0,016	0,04
$\overline{B}$	0,096	0,864	0,96
	0,12	0,88	1

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(\overline{B}|T)$ liest man nun ab zu $P(\overline{B}|T) = \frac{P(\overline{B} \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}096}{0{,}12}$ = 0,8 = 80%.

Aus der Vierfeldertafel kann man aber auch kompliziertere bedingte Wahrscheinlichkeiten ablesen, die mit Hilfe des Baumdiagramms nur sehr mühsam zu berechnen sind, z. B.:

$$P(B|T \cup \overline{B}) = \frac{P([T \cup \overline{B}] \cap B)}{P(T \cup \overline{B})} = \frac{P(T \cap B)}{P(T) + P(\overline{B}) - P(T \cap \overline{B})} = \frac{0{,}024}{0{,}984} \approx 2{,}4\% .$$

3. Lösung durch Rechnung:

Ohne graphische Hilfsmittel erhält man aus der Definitionsgleichung von $P(\overline{B}|T)$ unter Verwendung des Produktsatzes und, da B und $\overline{B}$ eine Zerlegung von Ω bilden, des Satzes von den totalen Wahrscheinlichkeit:

> **Produktsatz:**
> Ist $P(A) \neq 0$, so gilt: $P(A \cap B) = P(A) * P(B|A)$.

> **Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:**
> Bilden die Ereignisse $A_1, A_2, ..., A_n$ mit $P(A_i) \neq 0$ für alle i eine Zerlegung des Ereignisraumes Ω, so gilt für die Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Ereignisses B:
> $$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) * P(B|A_i)$$

$$P(\overline{B}|T) = \frac{P(\overline{B} \cap T)}{P(T)} = \frac{P(\overline{B}) * P(T|\overline{B})}{P(\overline{B}) * P(T|\overline{B}) + P(B) * P(T|B)} = \frac{0{,}96 * 0{,}1}{0{,}96 * 0{,}1 + 0{,}04 * 0{,}6} = 0{,}8 = 80\%$$

Das vorgeführte war zwar typisch, aber einfach, da die Zerlegung von Ω durch zwei Ereignisse bewirkt wurde. Im allgemeinen Fall liegt eine Zerlegung von Ω durch n Ereignisse $A_1, A_2, ..., A_n$ vor. Man kann dann einen Baum mit 2n Ästen und statt der 4-Feldertafel eine 2n-Feldertafel zeichnen.

Zur Berechnung einer Wahrscheinlichkeit $P(A_i|B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)}$ wendet man auf den Zähler den Produktsatz und auf den Nenner den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit an und erhält die

> ***Bayes*-Formel:**
> Bilden die Ereignisse $A_1, A_2, ..., A_n$ mit $P(A_i) \neq 0$ für alle i eine Zerlegung von Ω und ist B ein Ereignis mit $P(B) \neq 0$, so gilt für jedes i $P(A_i|B) = \frac{P(A_i) * P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) * P(B|A_j)}$.
>
> Sonderfall für n = 2:
> Mit $A_1 = A$ und $A_2 = \overline{A}$ gilt $P(A|B) = \frac{P(A) * P(B|A)}{P(A) * P(B|A) + P(\overline{A}) * P(B|\overline{A})}$.