HM IV SoSe 2002: Inhaltsverzeichnis FS + Übung

-I-

\# 1: • Anfangswertprobleme a, Iterationsverfahren Picard - Lindelöf

b, Potenzreihenansatz

• Isoklinen , • Lipschitz-Konstante L

(FS S.1)

\# 2: • autonomes nichtlineares Differentialgleichungssystem (DGL 1. Ordnung)

a, Kritische Punkte ≙ Gleichgewichtspunkte

b, Lsg. bestimmen (Dgl-FS Nr. 22)

c, Phasendiagramm anfertigen

• Dgl: $\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = \begin{cases} f(t) & t \leq d \\ g(t) & t > d \end{cases}$

(FS S. 1f.)

\# 3: • Dgl: a, Transformation von $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$ auf Polarkoordinaten

b, Lsg. mit Bernoulli-Dgl.

• RWP

• Sturm-Liouvillesche Eigenwertaufgabe

• Transformation einer DGL n. Ordnung in ein äquivalentes System 1. Ordnung

(FS. S. 2f.)

\# 4: • Laplace: AWP, Transf.

(FS. S. 3f.)

\# 5: • Konsistenzordnung von Einschrittverfahren

• Heaviside-Funktion

• Verfahren nach Heun

• Faltungsprodukte

• Rechteckschwingung

(FS S.4)

#6: • Fourier-Transformation

(FS S.4)

#7: • Fourier-Entwicklung periodischer Funktionen

(FS S.5)

-II-

#8: • Stab/Schleife: L_g, AWP

• Periodische Fortsetzung von FR

(FS. S.5)

#9: • Vektor- und Matrizennormen

• Abstand

• Householder-Matrix

(FS S. 6f)

#10: • Ausgleichsgerade, -parabel, ... kubische -parabel

• Stochastik

(FS. S. 7f)

#11: • Wahrscheinlichkeit, bedingte W.

• "Urnenmodell"

• Kombinatorik

(FS. S. 8f)

#12: • Varianz und Erwartungswert

• Verteilungs- und Dichtefunktion

(FS. S. 9f.)

HM IV, SoSe 2002, # 1

-1-

- Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf (HM 2; S. 55):

$$y'(x,y) := f(x,y) \quad ; \quad y(x_0) = y_0$$

  - Startfunktion: $y_0(x) := y_0$
  - $y_n(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\, dt \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

- Potenzreihenansatz: siehe Skript „Dgl." Nr. 24; Sperlinger-FS S. 182 – 183, HM II S. 85
- Isoklinen: —"— Nr. 25
- Lage und Art von Extrema, Wendepunkte: FS S. 135 f.

2

- autonome nichtlineare Dgl: $\dot{x} = f(x,y) \quad , \quad \dot{y} = g(x,y)$ (FS Nr. 23)
  - Gleichgewichtspunkte (Kritische Punkte):

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \dot{x} = 0 \\ (2) & \dot{y} = 0 \end{array}\right\}$$

Nst. von (1) oder (2) berechnen (in Abhängigkeit von x oder y) und in jeweils andere Fkt. einsetzen ($\rightarrow y_0$ bzw. x_0)
Lineare Näherung: $\underset{\sim}{J}_{P_0} / \underset{\sim}{J}_{P_1} \rightsquigarrow$ charakt. Polynom $\rightsquigarrow$ „EW"

Kritischer Punkt $P(x,y)$: $\left\{\begin{array}{l} x(t) = x \\ y(t) = y \end{array}\right. \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$

  - Verlauf der Phasenbahnen qualitativ sowie die Phasenbahn des linearen Systems $\underline{\dot{x}} = \underset{\sim}{A} \cdot \underline{x}$ (FS Nr. 22)

$$\underset{\sim}{A}(x,y) := \underset{\sim}{J} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \Bigg\}$$ Lineare Näherung!

$\Rightarrow$ Dgl. mit FS, Nr. 20 lösen für jeden kritischen Punkt $P(x,y)$!

stabile Knoten: $\underset{\sim}{J}$: $\left|(\underset{\sim}{J} - \lambda \underset{\sim}{E})\right|_{Nst.} \rightsquigarrow \lambda_{1,2} < 0$

- Stabilität: EW von $\underset{\sim}{A}(x,y)\big|_{P(x,y)}$ berechnen. (HM2, S. 144)

  1, $Re\ \lambda_k < 0$ für alle k => asymptotisch stabil

  2, $Re\ \lambda_k > 0$ für wenigstens ein k => asymptotisch instabil

  3, $n = 2$: $\underset{\sim}{A} \in 2\times2$: Tabelle HM2 S. 140

- Dgl: $\ddot{x}(t) + b\,\dot{x}(t) + c\,x(t) = \begin{cases} f(t) & t \le d \\ g(t) & t > d \end{cases}$ a, b !

  - allg., auf $\mathbb{R}$ einmal stetig differenzierbare Lsg.:

    1, beide Dgl. mittels FS Nr. 14 und 15 lösen => $x_1(t)$, $x_2(t)$

    2, gleiche Lösungsteile mit unterschiedlichen Konstanten beschriften

    3, konstruiere auf $\mathbb{R}$ differenzierbare Lsg. von Dgl:

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t) & t \le d \\ x_2(t) & t > d \end{cases}$$

$$(\alpha)\quad x_1(d) = x_2(d)$$

$$(\beta)\quad \dot{x}_1(d) = \dot{x}_2(d)$$

(α) und (β) so ineinander einsetzen, daß möglichst viele Unbekannte wegfallen.

#3:

- Transformation von $\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y)\end{pmatrix}$ auf Polarkoordinaten:

$$\dot{r} = r_x\ \dot{x} + r_y \cdot \dot{y}$$

$$\dot{\varphi} = \varphi_x\ \dot{x} + \varphi_y \cdot \dot{y}$$

mit: $r_x = \cos\varphi = \frac{x}{r}$, $\varphi_x = -\frac{1}{r}\sin\varphi = -\frac{y}{r^2}$;

$r_y = \sin\varphi = \frac{y}{r}$, $\varphi_y = \frac{1}{r}\cos\varphi = \frac{x}{r^2}$;

$x = r\cdot\cos\varphi$, $y = r\cdot\sin\varphi$, $x^2 + y^2 = r^2$

- RWP: 1, allg. Lösung der DGL bestimmen

  2, in Randbedingungen einsetzen und (soweit möglich) nach den Integrationskonstanten auflösen

- Transformation einer DGL n. Ordnung in ein äquivalentes System 1. Ordnung:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) \quad (n \geq 1)$$

-3-

setze: $y_1' = y_2 \quad$ mit $y_1 = y$

$y_2' = y_3$

$\vdots$

$y_{n-1}' = y_n$

$y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots y_n)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

#4:

- Laplace-Transformation (Eigenschaften / Tabellen):

1, Meyberg, Vachenauer: HM II S. 80 f.

2, Springer-FS S. 326 - 333

3, Bronstein: S. 1093 - 1098

- AWP mit L-Trafo: $y'' + ay' + cy = f(x) \quad ; y(0) = b_0, \; y'(0) = b_1$

1, L-Transformation anwenden (linke + rechte Seite) $\quad y = Y(s)$

rechtsseitig

$y' \circ\!\!-\!\!\bullet \; s\,Y(s) - y(0+) = sY - y(0+)$

$y'' = s^2 Y(s) - s\,y(0+) - y'(0+)$

u.s.w.

2, nach $Y = \mathcal{L}\{y\}$ auflösen

3, Rücktransformation

- System erster Ordnung - Lösung mittels $\mathcal{L}$-Trafo:

$\dot{x}_1 = \dots \quad ; x_1(0) = a_0 \; , \; x_2(0) = a_1$

$\dot{x}_2 = \dots$

1, L-Trafo anwenden $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \circ\!\!-\!\!\bullet \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} ; \quad \dot{x}_1 \circ\!\!-\!\!\bullet \; s\,X_1(s) - x_1(0+)$

$\dot{x}_2 \circ\!\!-\!\!\bullet \; s\,X_2(s) - x_2(0+)$

2, ineinander einsetzen und nach X_1 oder X_2 auflösen

3, Rücktransformation X_1 bzw X_2

4, x_2 bzw. x_1 aus x_1 bzw. x_2 bestimmen

#5 • $f * g(t) := \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau = \int_0^t g(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau$

$f * g(t)$ ○—● $F(s) \cdot G(s)$ (=> Umformen => Rücktransformation $\mathcal{L}^{-1}(X)$ _)

• Umformung trigonometrische Funktionen: Springer-FS S. 124f

• 1, Tabelle von (unbestimmten) Integralen: Springer-FS S. 149-178

2, ———— " ————: Bronstein S. 1049-1086

• $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$; $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{n^2(n^2+1)}$

• Partialbruchzerlegung: $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0}$ $(n < m)$

1, Zerlegung von $R(x)$ in Summe von:

• $\frac{A}{x - \alpha^k}$, • $\frac{Cx + D}{(x^2 + px + q)^m}$

2, Umformen, so daß kein Bruch mehr existiert

3, Koeffizienten berechnen:

• Einsetzmethode: nach Koef. ordnen
• Koeffizientenvergleich: nach x auflösen

} in Praxis Kombination sinnvoll

4, Literatur: • HM II S. 179f.

• Springer-FS: S. 117

#6: $F(\omega) := \mathcal{F}\{f(t)\} := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\, dt$ (Fourier-Transformierte bzw. Spektralfunktion)

$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} F(\omega)\, d\omega$

$F(\omega)$: Bildfunktion von $f(t)$

$f(t)$: Original- bzw. Urbildfunktion von $F(\omega)$

• Tabellen: Springer-FS S. 311-317

-5-

7: Fourier-Reihe

- Transformation: • siehe Springer-FS S. 306 f
- $S_f(t) = \frac{1}{2}\left(f(t-0) + f(t+0)\right)$ für $t \in \mathbb{R}$
- Trigonometrie: S. 122 - 128

a) $\cos(nt) = \cos(-nt)$; $\sin(-nt) = -\sin(nt)$

b) $\cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = \text{gerade} \\ -1 & \text{für } n = \text{ungerade} \end{cases} = (-1)^n$; $\sin(n\pi) = 0$

c) $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0, 4, 8, \ldots \\ 0 & \text{für } n = 1, 3, 5, \ldots \\ -1 & \text{für } n = 2, 6, 10, \ldots \end{cases}$ $\quad \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, 5, 9, \ldots \\ 0 & \text{für } n = 2, 4, 6, \ldots \\ -1 & \text{für } n = 3, 7, 11, \ldots \end{cases}$

- $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^2$
- a) ungerade Funktion · gerade Funktion = ungerade Funktion
  gerade Funktion · gerade Funktion = gerade Funktion
  ungerade Funktion · ungerade Funktion = gerade Funktion

  b) cos: gerade Funktion ; sin: ungerade Funktion

8: Fourierreihe konvergiere im definierten Intervall gegen die Funktion $f(t)$

a) für $S_f(t)$ nur Kosinus-Glieder erlaubt

$\Rightarrow$ setze $f(t)$ gerade fort, d.h. $b_k = 0$ für alle k

b) für $S_f(t)$ nur Sinus-Glieder erlaubt

$\Rightarrow$ setze $f(t)$ ungerade fort, d.h. $a_k = 0$ für alle k

- Rechenregeln:

a) Linearität: $\alpha f + \beta g \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha (c_k + \beta d_k) e^{ik\omega t}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

b) Konjugation: $\overline{f(t)} \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{c_{-k}}\, e^{ik\omega t}$; Zeitumkehr: $f(-t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k}\, e^{ik\omega t}$

c) Streckung, Ähnlichkeit: $f(ct) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{ik(c\omega)t}$, $c > 0$

$\Rightarrow$ Eine Änderung der Frequenz- oder Zeitskala hat keinen Einfluß auf die Amplituden der Teilschwingungen

d) Verschiebung im Zeitbereich: $f(t+a) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(e^{ik\omega a} c_k\right) \cdot e^{ik\omega t}$, $a \in \mathbb{R}$

e) Verschiebung im Frequenzbereich: $e^{ik\omega t} f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k-n}\, e^{ik\omega t}$, $n \in \mathbb{Z}$

#9

- Vektornormen: (Bronstein S.268)

a) Euklidische Norm: $\|\underline{x}\| = \|\underline{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

b) Maximumsnorm: $\|\underline{x}\| = \|\underline{x}\|_\infty := \max_{1\le i\le n} |x_i|$

c) Betragssummennorm: $\|x\| = \|\underline{x}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |\underline{x}_i|$

* Konvergenz im Quadratischen Mittel

$$\|\underline{f} - \underline{g}\|_2 := \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T |f(x) - g(x)|^2 \, dx} \quad \text{(Funktionswerte auf } [0, T])$$

$$\lim_{N\to\infty} \|f - S_N\|_2 = 0 \qquad S_N\text{: Partialsummen}$$

- Matrizennormen: (Bronstein S.269)

a) Spektralnorm: $\|\underset{\sim}{A}\| = \|\underset{\sim}{A}\|_2 := \sqrt{\lambda_{max}(\underset{\sim}{A}^T \cdot \underset{\sim}{A})}$

($\lambda_{max}(\underset{\sim}{A}^T \cdot \underset{\sim}{A})$ ist der größte Eigenwert der Matrix $\underset{\sim}{A}^T \cdot \underset{\sim}{A}$)

b) Zeilensummennorm: $\|\underset{\sim}{A}\| = \|\underset{\sim}{A}\|_\infty := \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

c) Spaltensummennorm: $\|\underset{\sim}{A}\| = \|\underset{\sim}{A}\|_1 := \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

- Eine Matrix $\underset{\sim}{A}$ ist orthogonal $\Leftrightarrow \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{A}^T = \underset{\sim}{A}^T \cdot \underset{\sim}{A} = 1 \Leftrightarrow \underset{\sim}{A}^T = \underset{\sim}{A}^{-1}$

$\Leftrightarrow |\det \underset{\sim}{A}| = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1$

$\Leftrightarrow \|\underset{\sim}{A}\underline{v}_1 - \underset{\sim}{A}\underline{v}_2\|_2 = \|\underline{v}_1 - \underline{v}_2\|_2 \quad \forall\, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$

(Abbildung längentreu)

$\Leftrightarrow \langle \underset{\sim}{A}\underline{v}_1 | \underset{\sim}{A}\underline{v}_2 \rangle = \langle \underline{v}_1 | \underline{v}_2 \rangle$ (Abbildung winkeltreu)

(dabei ist $\langle \underline{x} | \underline{y} \rangle := \underline{y}^T \cdot \underline{x}$ das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$)

$\Leftrightarrow \underline{v} \to \underset{\sim}{A}\underline{v}$ längen- und winkeltreu ("Isometrie")

- V sei ein reeller Vektorraum mit einer Norm $\|\ldots\|$. Es gibt genau dann ein Skalarprodukt $\langle\ |\ \rangle$ auf V, das die Norm induziert, wenn die Parallelogrammgleichung gilt: $\|\underline{x} + \underline{y}\|^2 + \|\underline{x} - \underline{y}\|^2 = 2 \cdot \|\underline{x}\|^2 + 2 \cdot \|\underline{y}\|^2 \quad \forall\, \underline{x}, \underline{y} \in V$

- Skalarprodukt: $\{f: [a,b] \to \mathbb{R}, f \text{ stetig}\} = C([a,b],\mathbb{R})$

  $\rightsquigarrow$ $\langle f | g \rangle = \int_a^b f(t) \cdot g(t)\, dt$ Skalarprodukt auf V

-7-

- $\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$ ist Orthonormalsystem bzgl. $\langle\ |\ \rangle$ (bzw. V), wenn gilt:
  - $\|f_i\| = \langle f_i | f_i \rangle = 1 \quad \forall i \in [1,n]$
  - $\langle f_i ; f_j \rangle = 0 \quad \forall i,j \in [1,n],\ i \neq j$

- h und g haben den Abstand $d(h,g) = \|h,g\| =$

  mit $\|h,g\|^2 = \langle h|h \rangle + \langle g|g \rangle - 2\langle h|g \rangle$

- $U = \text{span}\{f_0, f_1, f_2\}$ (3 dim. Unterraum von V) ; $h \in V$ soll so bestimmt werden, daß $\|g-h\|$ minimal. $g(t)$ sei gegeben

  $\Rightarrow$ h ist die orthogonale Projektion von g auf V

  $\Rightarrow h = [\langle g | f_0 \rangle \cdot f_0] + [\langle g | f_1 \rangle \cdot f_1] + [\langle g | f_2 \rangle \cdot f_2]$

#10: • Minimierung des Residiums $\underline{r}(\underline{c}) = (y_i - y(t_i))_i$ $\underline{c}^T = (c_0, c_1, \ldots)$ im Sinne der Euklidischen Norm ...

a, der Ausgleichsgerade $y(t) = c_0 + c_1 t$

b, der Ausgleichsparabel $y(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$

c, der kubischen A.p. $y(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$

i	1	2	3	4	...
t_i	a_1	a_2	a_3	a_4	...
y_i	b_1	b_2	b_3	b_4	...

Zu lösen ist: $\underset{\sim}{A}^T \underset{\sim}{A} \cdot \underline{x} = \underset{\sim}{A}^T \underline{b}$; $\underline{x} = \begin{pmatrix} c_n \\ \vdots \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix}$

1 a, $\underset{\sim}{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & a_n \end{pmatrix}$ 1 b, $\underset{\sim}{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 \end{pmatrix}$ 1 c, $\underset{\sim}{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & a_n^3 \end{pmatrix}$

$\underset{\sim}{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

2, Berechne $\underset{\sim}{A}^T \underset{\sim}{A} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ mit $\underset{\sim}{A}^T \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\underset{\sim}{A}^T \cdot \underset{\sim}{A}$ muß symmetrisch sein!

3, Berechne $\underset{\sim}{A}^T \cdot \underline{b}$ mit $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots)^T$

$\Rightarrow \underbrace{\underset{\sim}{A}^T \cdot \underset{\sim}{A}}\cdot \underline{x} = \underbrace{\underset{\sim}{A}^T \cdot \underline{b}}$ $\Rightarrow$ nach $\underline{x}$ auflösen! (Gaußelimination)

$\left(\quad \middle| \quad \right) \rightsquigarrow \ldots \begin{matrix} c_0 = \ldots \\ c_1 = \ldots \\ c_2 = \ldots \end{matrix}$ $\rightsquigarrow$ optimales (kubisches) Polynom / Gerade zu den i. Wertepaaren (t_i, y_i): $y(t) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$

- der Punkt $(\tilde{t}, \tilde{y})$ mit $\tilde{t} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m t_i$, $\tilde{y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m y_i$ liegt auf der Ausgleichsgeraden durch die Punkte (t_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$

- auf dem ∞-dim Vektorraum $V := \text{span}\{p(x) = x^n \,;\, n \in \mathbb{N}_0\}$ (Polynomraum) wird durch $\langle p | q \rangle := \int_0^\infty p(x)\, q(x)\, e^{-x}\, dx \;;\; p, q \in V$ ein Skalarprodukt definiert.

- E, A und B_i, $i \in \mathbb{N}$ mit $A \subseteq E$, $B_i \subseteq E \;\forall i$;

a) $A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A \setminus B_i)$ b) $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) \setminus A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (B_i \setminus A)$

c) $A \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \setminus B_i)$

- $A_1, A_2 \in \mathcal{O}\!\!\!\mathcal{L}$: a) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

b) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3)$
$- P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

- Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{O}\!\!\!\mathcal{L}$ mit $A_j \cap A_k \neq 0$:

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j \right) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$$

#11 • Zufallsgröße X heißt hypergeometrisch nach $H(N; K; n)$ verteilt, wenn gilt:

$$H(N; K; n; k) := W(k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots, n$$

Beispiel: In einer Urne befinden sich N Kugeln, davon genau K der Farbe rot. $W(k)$ sei die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, daß beim Ziehen von n Kugeln genau k Stück rot sind.

Ziehen <u>ohne</u> Zurücklegen; <u>Erwartungswert</u>: $n \cdot p$; <u>Varianz</u>: $n \cdot p \cdot (1-p) \cdot \frac{N-n}{N-1}$
$\quad \hookrightarrow (:= \sigma) \qquad \hookrightarrow (:= \sigma^2)$

- Eine Zufallsgröße heißt binominal nach $B(n; k)$ verteilt, wenn gilt:

$$B(n; p; k) := W(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots, n$$

Beispiel: wie vorher; n: Anzahl der gezogenen Kugeln; $p = \frac{K}{N}$ Ziehen <u>mit</u> Zurücklegen

<u>Erwartungswert</u>: $n \cdot p$, <u>Varianz</u>: $n \cdot p \cdot (1-p)$ [= Streuung]
$\hookrightarrow (:= \sigma) \qquad \hookrightarrow (:= \sigma^2)$

- Kombinatorische Formeln: Ereignisraum Ω habe n Elemente ...

  a) Die Anzahl der geordneten k-Tupel (Variationen) aus Ω ist

  $$(n)_k = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$$

  b) die Anzahl der Permutationen von Ω ist

  $$n! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$$

  c) die Anzahl der Teilmengen von Ω mit k Elementen ist

  $$\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad \text{Bsp.: } \binom{5}{3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 10$$

- Anzahl der Auswahlen von k Elementen aus einer Grundgesamtheit von n Elementen

	ohne Zurücklegen	mit Zurücklegen
Reihenfolge beachtet	$(n)_k$	n^k
Reihenfolge nicht beachtet	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

$$P(A\cap\overline{B}) = P(A) - P(A\cap B)$$
$$P(\overline{A}\cap B) = P(B) - P(A\cap B)$$

- $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ $\qquad P(B|A) = \dfrac{P(B\cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

- Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit: $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\cdot P(B|A_i)$

- Bayes-Formel: Bilden die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mit $P(A_i) \neq 0$ für alle i eine Zerlegung von Ω (Ereignisraum) und ist B ein Ereignis mit $P(B) \neq 0$, so gilt für jedes i: $P(A_i|B) = \dfrac{P(A_i)\cdot P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\cdot P(B|A_j)}$

#12:

- Tabelle: diskrete Wahrscheinlichkeits- und stetige Verteilungsfunktionen (Zufallsvariable): S. 416 f.

- Sätze über die Varianz:

  a) $Var(aX) = a^2\, Var(X)$

  b) $Var(X) = E[(X-a)]^2 - [E(X-a)]^2 = E(X^2) - [E(X-a)]^2$

c, $\operatorname{Var} X = 0 \iff X(\omega) = \text{const.}$ (Zufallsgröße)

d, $\operatorname{Var}(X+a) = \operatorname{Var} X$

$F(x) := P(X < x)$

- Sei X stetige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F(x)$. Falls exist. $f: \mathbb{R} \to [0;\infty[$ mit $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\, d\xi$, so heißt $f(x)$ Dichtefunktion der Zufallsvariablen X

- Zufallsvariable $\bar{X}_n := \frac{1}{n}\left(X_1 + X_2 + \ldots + X_n\right)$
- $P(X \geq n_0 + n \mid X > n_0) = P(X \geq n) \iff X$ hat kein "Gedächtnis"
- $E = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot P(X = p)$
- Verteilungsfunktion: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 - e^{(-\lambda x)} & \text{für } x > 0 \end{cases}$
  - allg. gilt: a, $0 \leq F(x) \leq 1$

    b, $F(x)$ steigt monoton

    c, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ und d, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
  - Dichtefunktion $f(x) := F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \lambda e^{(-\lambda x)} & \text{für } x > 0 \end{cases}$
  - $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \frac{1}{\lambda}$ (falls $\int_{-\infty}^{x} |x \cdot f(x)|\, dx$ exist.)
  - $\operatorname{Var}(x) = \frac{1}{\lambda^2}$
- $f(x) \in \mathbb{R}$ ist genau dann eine Dichtefunktion, wenn gilt:

  a, $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

  b, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \stackrel{!}{=} 1$