Formelsammlung Signaldarstellung SoSe 2007

1, Faltung:

$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$

- $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) \cdot h(\tau)\, d\tau$

- Skizze von $y(t)$:
  - An den Bereichsgrenzen muß $y(t)$ stetig sein; Ausnahme: $x(t)$ oder $y(t)$ enthält δ-Impuls
  - System ist kausal $\Longleftrightarrow h(\tau) = 0$ für $\tau < 0$

- Vereinfachungen:
  - $x(t) = \delta(t) \Rightarrow y(t) = h(t)$
  - $x(t) = u(t)$, $y(t)$ gegeben $\Rightarrow h(t) = \frac{\partial}{\partial t} y(t)$

2, Fourier-Reihe:

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_a^{a+T} f(t) \cos(n\omega t)\, dt \quad (n \geq 0)\,; \quad b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_a^{a+T} f(t) \sin(n\omega t)\, dt \quad (n \geq 1)$$

T = Periode $\quad \omega = \frac{2\pi}{T}$ = Grundfrequenz

- komplexe Form: $S_f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{i n \omega t}$ mit $c_n = \frac{1}{T} \cdot \int_a^{a+T} f(t) \cdot e^{-i n \omega t}\, dt$

- Spezialfälle:

  1.: $T = 2\pi \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt\,; \; b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt\,; \; c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt$

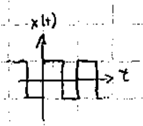
  2.: $f(t)$ gerade $\Longleftrightarrow x(t) = x(-t) \Longleftrightarrow$ Achsensymmetrie

  $$\Rightarrow a_n = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega t)\, dt\,; \quad b_n = 0\,; \quad c_n = c_{-n}$$

  3.: $f(t)$ ungerade $\Longleftrightarrow x(-t) = -x(t) \Longleftrightarrow$ Punktsymmetrie

  $$\Rightarrow a_n = 0\,; \quad b_n = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{T/2} f(t) \sin(n\omega t)\, dt\,; \quad c_n = -c_{-n}$$

  4.: Halbwellensymmetrie $\Longleftrightarrow x(t) = -x\left(t + \frac{T_0}{2}\right)$



  $$\Rightarrow a_n = \frac{4}{T_0} \cdot \int_0^{T_0/2} x(t) \cos(n \omega_0 t)\, dt \text{ für } n = 1,3,5,\ldots\,; \quad a_n = 0 \text{ für } k = 0,2,4,\ldots\,; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

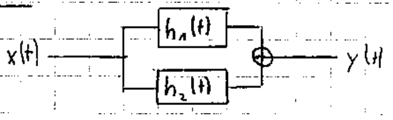
  $$b_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} x(t) \sin(n \omega_0 t)\, dt \text{ für } n = 1,3,5,\ldots\,; \quad a_n = 0 \text{ für } k = 2,4,6,\ldots$$

- Das Spektrum der FR ist eine Impulsfolge:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j(\omega - k\omega_0)t}\, dt = \delta(\omega - k\omega_0)\,; \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j\omega(t - nT_0)}\, d\omega = \delta(t - nT_0)$$

3, LTI-Systeme:

a, parallel:



b, seriell $x(t) \to \boxed{h_1(t)} \to \boxed{h_2(t)} \to y(t)$

$$y(t) = x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] \qquad y(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t)$$

c, Linearität: $x_1(t) + x_2(t) \to \boxed{h(t)} \to y_1(t) + y_2(t)$

d, Zeitinvarianz: $x(t-t_0) \to \boxed{h(t)} \to y(t-t_0)$

- Vereinfachungen:
  - $x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$; $x(t) \cdot \delta(t-t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t-t_0)$
  - $x[n] * \delta[n-n_0] = x[n-n_0]$; $x[n] \cdot \delta[n-n_0] = x[n_0] \cdot \delta[n-n_0]$

es gilt: $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \cdot x(t-\tau) = x(t) * \delta(t)$

4, Fourier-Transformation:

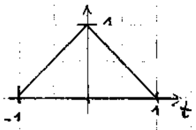
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

- Vertauschungssatz: $x(t) \overset{FT}{\circ\!\!-\!\!\bullet} X(\omega)$; $\frac{1}{2\pi} X^*(t) \overset{FT}{\circ\!\!-\!\!\bullet} x^*(\omega)$

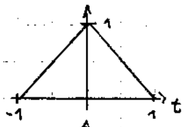
$e^{-at^2} \overset{FT}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \quad (a>0)$

$h \cdot \frac{a}{\pi} \cdot si(at) \overset{FT}{\circ\!\!-\!\!\bullet} h \cdot [u(\omega+a) - u(\omega-a)]$

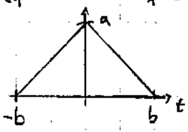
$si(at) := \frac{\sin(at)}{at}$; $x_1(t) * x_2(t) \overset{FT}{\circ\!\!-\!\!\bullet} X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$; $x_1(t) \cdot x_2(t) \overset{FT}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$



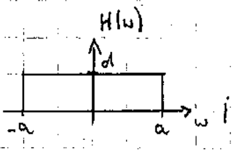
$\overset{FT}{\circ\!\!-\!\!\bullet} si^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{2\pi} si^2\left(\frac{t}{2}\right) \overset{FT}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$



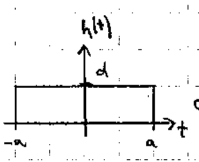
$\frac{a}{2\pi} si^2\left(\frac{b \cdot t}{2}\right) \overset{FT}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$



$\frac{h(t) \cdot si(a \cdot t) \cdot d \cdot a}{\pi} \overset{FT}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$



;



$\overset{FT}{\circ\!\!-\!\!\bullet} 2 \cdot d \cdot a \cdot si(a\omega)$

$$\frac{1}{T_0} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \; ; \; \sum_{n=\infty}^{\infty} e^{-jn\omega_0 T} = \omega_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

Das Parseval-Theorem besagt, daß sich die Signalleistung eindeutig aus einem Satz reeller Zahlenwerte entwickeln läßt: $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$

5, <u>Abtasttheorem:</u> Sei $x(t)$ ein bandbegrenztes Signal mit dem Spektrum $X(\omega)$, wobei $X(\omega) = 0$ für $|\omega| > \omega_g$, dann ist $x(t)$ durch seine Abtastwerte $x(nT_s)$ mit $n \in \mathbb{Z}$ eindeutig bestimmt, wenn gilt: $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \geq 2\,\omega_g$

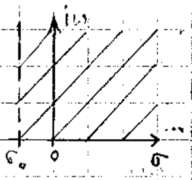
ω_s := Abtastfrequenz , ω_g := maximale Signalfrequenz

6, <u>Laplace-Trafo:</u> $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-\sigma t}\, e^{-j\omega t}\, dt$; $s := \sigma + j\omega$

Für $\sigma = 0$ geht die LT in die zeitkontinuierliche FT (Fourier-Transformation) über,

$\sigma = 0 \iff$ Ausführung LT entlang der Imaginären Achse

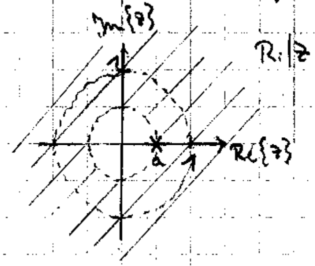
FT existiert $\iff$ Im-Achse im Konvergenzbereich



PN-Diagramm (rechtsseitig)

7, <u>z-Trafo:</u> $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$; $z = r \cdot e^{j\Omega}$

Eine Impulsantwort $h[n] \overset{zT}{\circ\!\!-\!\!\bullet} H(z)$ ist rechtsseitig, d.h. kausal, wenn der Konvergenzbereich vom äußersten Pol nach außen reicht.



ZDFT existiert $\iff$ Einheitskreis im Konvergenzbereich

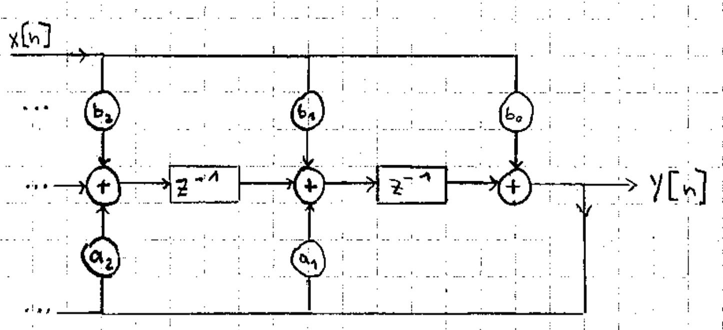
$\iff$ System stabil

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\text{Ausgang}}{\text{Eingang}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots}$$

Differenzengleichung: $Y(z) = X(z) \cdot (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots) + Y(z) \cdot (a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots)$

$\bullet\!\!-\!\!\circ$ zT

DGL im Zeitbereich: $y[n] = b_0 \cdot x[n] + b_1 x[n-1] + \dots + a_1\, y[n-1] + a_2\, y[n-2] + \dots$



Impulsantwort: $Y[n] = X[n] * h[n]$

8) allgemeine Formeln:

- Trigonometrische Funktionen:

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

2. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$; $\sin k\pi = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

   $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \cos\beta$; $\cos k\pi = (-1)^k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

3. $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

4. $\cos x = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$; $\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$;

   $e^{iz} = \cos z + i\sin z$; $e^{-iz} = \cos z - i\sin z$; $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

Winkel	sin	cos	tan	cot
$0°$	0	1	0	$-$
$15° = \frac{\pi}{12}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$30° = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$45° = \frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60° = \frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}/2$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$75° = \frac{5\pi}{12}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$90° = \frac{\pi}{2}$	1	0	$-$	0

$f(x)$	$f'(x)$	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$(a>0,\ a\neq 1)$

$\sqrt{2} \approx 1{,}41$; $\sqrt{3} \approx 1{,}73$; $\sqrt{6} \approx 2{,}44$

- Exponentialfunktionen: $e^{x+y} = e^x e^y$; $(e^x)^y = e^{x \cdot y}$; $e^{\pm ik\pi} = (-1)^k \quad (k \in \mathbb{Z})$

  $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

- Logarithmische Funktionen: $\ln x + \ln y = \ln x \cdot y$; $\ln x - \ln y = \ln\frac{x}{y}$;

  $\ln x^p = p \cdot \ln x$; $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

- δ - Funktion: $\delta(-x) = \delta(x)$; $\delta(a \cdot x) = \frac{\delta(x)}{|a|}$; $\delta(t) = \frac{\partial}{\partial t} u(t)$

- geometrische Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & , |q| < 1 \\ \to \infty & , |q| \geq 1 \end{cases}$

• Symmetrieeigenschaften: $x(t) = x^*(t) \Rightarrow X(\omega) = X^*(-\omega)$

$\Rightarrow \mathrm{Re}\{X(\omega)\} = \mathrm{Re}\{X^*(\omega)\}$, $\mathrm{Im}\{X(\omega)\} = -\mathrm{Im}\{X(-\omega)\}$

$|X(\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2\{X(\omega)\} + \mathrm{Im}^2\{X(\omega)\}} = \mathrm{Re}^2\{X(-\omega)\} + \mathrm{Im}\{X(-\omega)\} = |X(-\omega)|$

$\Rightarrow$ das Amplitudenspektrum einer reellen Funktion ist gerade

• PBZ einer echt gebrochen rationalen Funktion: $\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)} = \underbrace{\frac{A}{(z-\alpha)} + \frac{B}{(z-\beta)}}_{(*)}$

mit: $A = \frac{1}{\alpha-\beta}$, $B = -\frac{1}{\alpha-\beta}$ (lt. ZÜ #8, Aufg. 4)

<u>Beweis:</u> $(*) = \frac{(z-\beta)\cdot A + (z-\alpha)B}{(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{z(A+B) - \beta\cdot A - \alpha\cdot B}{(z-\alpha)(z-\beta)}$

Koeffizientenvergleich: I, $A+B=0 \Rightarrow A = -B$; II, $-\alpha B - \beta A = 1$

I, in II,: $A(\alpha-\beta) = 1 \Rightarrow$ Behauptung q.e.d.

• Wendepunkte einer Exponentialfunktion: $f(t) = a \cdot \exp\left(-\frac{t-c}{b}\right)^2$

$t_w = c \pm \sqrt{2}$; $x(t_w) \approx a \cdot 0{,}6$