

Gleichgewichtsbedingungen:

- 1 -

$$(1) \quad \underline{F} = \sum_{i=1}^n \underline{F}_i \stackrel{!}{=} \underline{0} \quad \text{und}$$

$$(2) \quad \underline{M}^{(P)} = \sum_{j=1}^m \underline{M}_j + \sum_{i=1}^n r_{PP_i} \times \underline{F}_i = \underline{0}$$

$$M_x^{(P)} = M_{x_0} + \sum_i (y_i F_{z_i} - z_i F_{y_i}) = 0$$

$$M_y^{(P)} = M_{y_0} + \sum_i (z_i F_{x_i} - x_i F_{z_i}) = 0$$

$$M_z^{(P)} = M_{z_0} + \sum_i (x_i F_{y_i} - y_i F_{x_i}) = 0$$

2.3 Statische Bestimmtheit

$$f = g \cdot i - \sum_{n=1}^j w_n$$

mit f : Anzahl der Freiheitsgrade

$g = 3$: ebener Fall, $g = 6$: räumlicher Fall

i : Anzahl Körper / Stäbe (direkt beteiligt)

j : Anzahl der Lager (auch Verbindung zwischen zwei Körpern)

w_n : Wertigkeit des n -ten Lagers (Anzahl der möglichen Lagerreaktionen), 2D: $w_{\max} = 2 + 1$; 3D: $w_{\max} = 3 + 3$

↑
Drehmoment
Kraftübertragung

$f = 0$: System statisch bestimmt

$f < 0$: System ist $|f|$ -fach statisch unbestimmt

$f > 0$: System ist f -fach statisch unterbestimmt

(wackelige System, kinematisch unbestimmt)

2.3.1 Gelenklager:

$$W_n = (s-1) \cdot h$$

mit W_n : Wertigkeit des n -ten Lagers

s : Anzahl der beteiligten Stäbe (Körper) an einer Verbindungsstelle

$h = 2$: ebener Fall, $h = 3$: räumlicher Fall

2.4 Schwerpunkt

Massenmittelpunkt bzw. Schwerpunkt eines Körpers:

$$x_{OS} = \frac{1}{m} \int_K x_{Op} \cdot dm, \quad y_{OS} = \frac{1}{m} \int_K y_{Op} \cdot dm, \quad z_{OS} = \frac{1}{m} \int_K z_{Op} \cdot dm$$

Volumenmittelpunkt (homog. Körper: $\sigma(x,y,z) = \sigma_0 = \text{const.}$):

$$\underline{r}_{OS} = \frac{1}{V} \int_V \underline{r}_{Op} \cdot \underbrace{dV}_{\text{Volumenelement}}$$

Flächenmittelpunkt (konst. Flächendichte $\rho_A = \frac{dm}{dA}$):

$$\underline{r}_{OS} = \frac{1}{A} \int_A \underline{r}_{Op} \cdot \underbrace{dA}_{\text{Flächenelement}}$$

Linienmittelpunkt (Linie hat verteilte Masse: $\rho = \frac{dm}{dL}$):

$$\underline{r}_{OS} = \frac{1}{L} \int_L \underline{r}_{Op} \cdot \underbrace{dL}_{\text{Linienelement}}$$

2.4.2 Bestimmung des Lage des Schwerpunktes eines Körpers, der sich aus mehreren Teilkörpern aufbaut

Massenschwerpunkt: $x_{OS} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{Si} \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y_{OS} = \frac{\sum_{i=1}^n y_{Si} \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad z_{OS} = \frac{\sum_{i=1}^n z_{Si} \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$

(Anwendung bei inhomogenen Körper) $m_i = \rho_i \cdot V_i$

spezifischer Schwerpunkt: $\underline{r}_{OS} = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{bmatrix} = \frac{\sum_{i=1}^n \underline{r}_{Si} \cdot A_i \cdot \delta_i}{\sum_{i=1}^n A_i \cdot \delta_i}$ δ_i : spezifische Gewicht

(Anwendung bei inhomogenen Körpern, wenn Ergänzbarkeit $g \neq \text{const.}$)

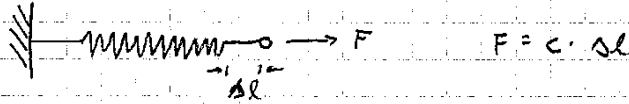
Flächenschwerpunkt: $\vec{r}_{os} = \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix} = \frac{\sum_{i=1}^n r_{s_i} \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$

(Anwendung bei Körpern konstanter Dichte)

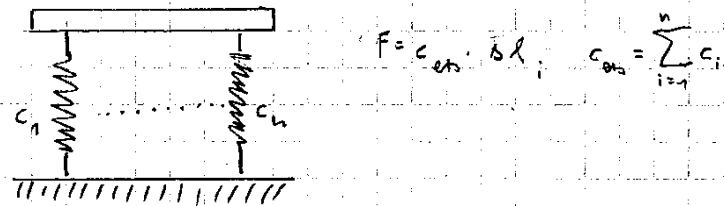
-3-

Ersatzfedersteifigkeit

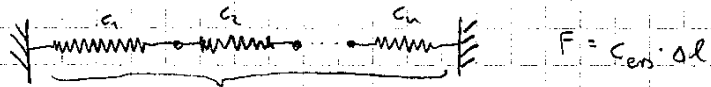
eine Feder:



Parallelschaltung:



Reihenschaltung:

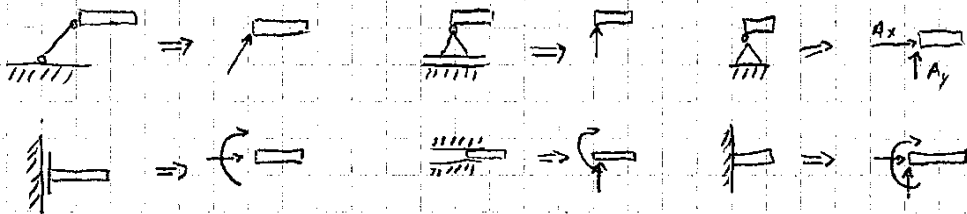


$$\frac{1}{c_{ers}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} \quad n \geq 3$$

2.5. Schnittreaktionen: lineare Kräfte und Momente

1. Schritt: Koordinatensystem wählen:

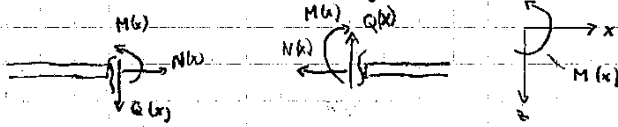
2. Schritt: Lagrange's Schnittprinzip für Auflagerreaktionen:



3. Schritt: Auflagerreaktionen bestimmen: $\sum M_i^{(a)} = 0; \quad \sum F_i = 0$
"Schnittsindes"

(a) für jeden Auflagerpunkt berechnen

4. Schritt: Freischnitten und Gleichgewicht für Schnittgrößen:

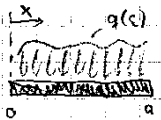


positive Schnittufer negative Schnittufer (neg. Schnittreaktionen weisen in die negativen Koordinatenrichtungen)

- $N(x)$: Normalkraft (positive Normalkraft \Rightarrow Zugbeanspruchung des Körpers)
- $Q(y), Q(z)$: Querkräfte
- $M(x)$: Torsionsmoment
- $M(y), M(z)$: Biegemomente

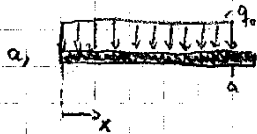
Achtung: Schritt 4 für jeden Angriffspunkt einer Kraft wiederholen

2.5.2. Kontinuierliche Kräfte (Streckenlasten): $q(x) = \left[\frac{N}{m} \right]$



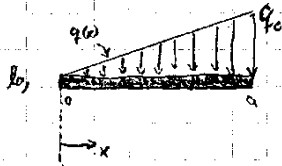
Resultierende Kraft der Streckenlast: $R = \int_0^a q(x) dx$

Sonderfälle:



$q(x) = \text{const} = q_0$: $R = q_0 \cdot a$ ("Fläche mal Länge")

Angriffspunkt von R: $\frac{1}{2} \cdot a$



$q(x) = q_0 \cdot \frac{x}{a}$: $R = \frac{1}{2} q_0 \cdot a$ ("Fläche mal Länge")

Angriffspunkt von R: $\frac{2}{3} \cdot a$

Bestimmung von $Q(x)$ und $M(x)$ ohne Ermittlung von Lagerreaktionen:

$Q(x) = \int q(x) dx + C_1$

$M(x) = \int Q(x) dx + C_2$

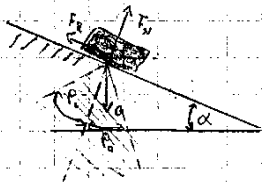
C_1 und C_2 werden aus den Randwertbedingungen bestimmt:

	Q	M	N
	0	0	0
	i.a. $\neq 0$	0	i.a. $\neq 0$
	i.a. $\neq 0$	0	0
	0	i.a. $\neq 0$	i.a. $\neq 0$
	i.a. $\neq 0$	i.a. $\neq 0$	i.a. $\neq 0$

φ	Q	M
0	Konstant	linear
Konstant	linear	quadratische Parabel
linear	quadratische Parabel	kubische Parabel

Last	Q	M
	Knicke	-
	Spring	Knicke
	-	Spring

2.6 Reibung zwischen starren Körpern



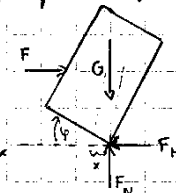
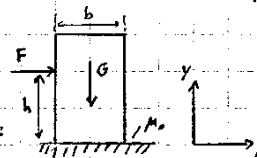
Ein Körper haftet durch Reibung auf einem anderen, wenn die Resultierende der an ihm angreifenden äußeren Kräfte innerhalb des Reibungskegels liegt.

$$\text{Reibungswinkel } \rho_0: \tan \rho_0 = \mu_0 \quad \left(0 \leq \rho_0 \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

Def.: Reibungskegel \Rightarrow gerader Kreiskegel, dessen Achse senkrecht zur Berührungsebene des Körpers steht und dessen Mantellinien mit der Achse den Winkel ρ_0 einschließen.

$$F_R = \mu_0 \cdot F_N = \mu_0 \cdot G \cos \alpha_0 \quad \text{oberer Grenzwert} \quad F_R \geq \mu_r \cdot F_N, \text{ damit Körper haftet (Coulomb)}$$

$$G = \sin \alpha_0$$

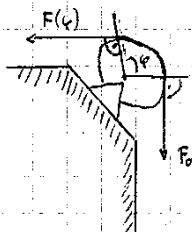


$$x = \left(\frac{b}{2} - \frac{h}{2} \tan \varphi\right) \cdot \cos \varphi$$

Bsp.: Quader auf rauher Oberfläche:

$$\text{Kippen: } h \geq \frac{b}{2\mu_0} \quad \text{Gleiten: } h = \frac{b}{2\mu_0}$$

2.6.1 Seilhaftung und Seilreibung



$$\text{Euler-Eytelwein'sche Gleichung: } F(\varphi) = F_0 \cdot e^{\mu_0 \varphi} \quad (F(\varphi) > F_0)$$

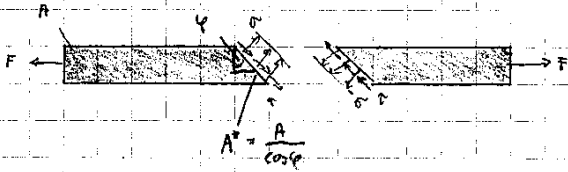
$$F(\varphi) = F_0 \cdot e^{-\mu_0 \varphi} \quad (F(\varphi) < F_0)$$

$$\ln \frac{F(\varphi)}{F_0} = \mu_0 \cdot \varphi \quad (F(\varphi) > F_0)$$

$$\text{Vergrößerungsfaktor der Kraft } F_0 \text{ infolge Reibung: } \frac{F}{F_0} = e^{\mu_0 \varphi}$$

Kapitel 3: Elasto-Statik

Spannung := Normalkraft pro Fläche : $\sigma = \frac{N(x)}{A}$ Dim: $\left[\frac{N}{mm^2} \right]$



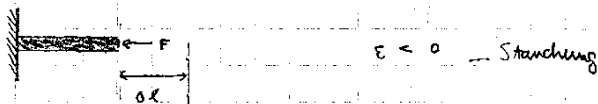
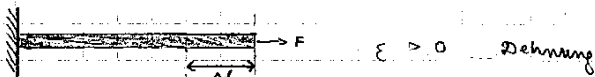
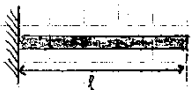
A' : Fläche, auf der die gleichmäßig auf die Schnittfläche verteilten inneren Kräfte wirken

- Normalspannung: $\sigma_\varphi = \frac{\sigma_0}{2} (1 + \cos(2\varphi))$
 - Schubspannung: $\tau_\varphi = \frac{\sigma_0}{2} \sin(2\varphi)$ } $\sigma_0 := \frac{N}{A}$: Normalspannung in einem Schnitt senkrecht zur Stabsachse

$\sigma_{max} = \sigma_0$ bei $\varphi = 0$; $\tau_{max} = \frac{\sigma_0}{2}$ bei $\varphi = \frac{\pi}{4}$

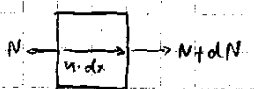
Winkel	sin	cos	tan
0°	0	1	0
15°	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$2-\sqrt{3}$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
75°	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$2+\sqrt{3}$
90°	1	0	-

3.1.2 Dehnung



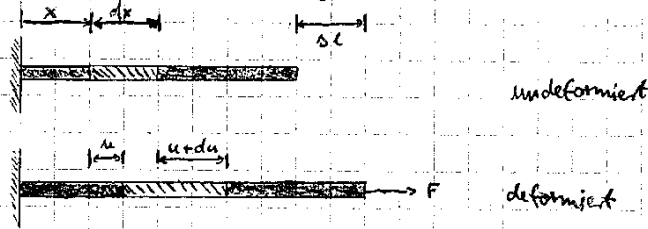
$\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$ $[\epsilon] = 1$ $\Delta l \ll l, |\epsilon| \ll 1$

3.2.1 Gleichgewichtsbedingung



$$\sum F_{x_i} = 0: -N + n \cdot dx + N + dN = 0 \Rightarrow N(x) = - \int_{x_0}^{x_1} n(x) dx$$

3.2.2 Kinematische Beziehung



örtliche Dehnung: $\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx}$, $du(x)$: Längenänderung, dx : Ausgangslänge

\Rightarrow Verschiebung: $u(x) = \int_{x_0}^{x_1} \varepsilon(x) dx$

3.2.3 Elastizitätsgesetz (Stoffgesetz)

Hooke'sches Gesetz: $\sigma = E \cdot \varepsilon$ im linearen Bereich ($0 \leq \sigma \leq \sigma_p$) $[E] = \frac{N}{mm^2}$

σ : Spannung, E : Elastizitätsmodul, ε : Dehnung, σ_p : Proportionalitätsgrenze

Längenänderung eines Stabes: $\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}$ ($F = \text{konst.}, A = \text{konst.}, \Delta T = 0$)

E : Elastizitätsmodul, $E \cdot A$: Dehnsteifigkeit, $\Delta l = l \cdot \varepsilon$ ($\varepsilon = \text{konst.}$)

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} = \frac{\sigma(x)}{E} + \alpha_T \cdot \Delta T(x) = \frac{N(x)}{E \cdot A(x)} + \alpha_T \cdot \Delta T(x)$$

mechanische o. thermische Dehnung

α_T : thermischer Ausdehnungskoeffizient
 $\Delta T(x)$: Temperaturänderung

3.2.4 Elastizitätsgesetz für einen Stab

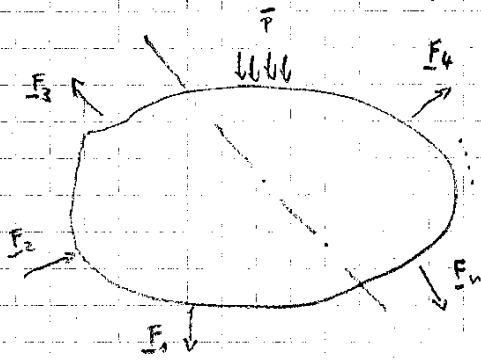
$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{F(x)}{E \cdot A(x)} + \alpha_T \cdot \Delta T, \text{ ergibt: } \varepsilon = \frac{du(x)}{dx} \Rightarrow u(x) = \int_{u(a)}^{u(b)} du = \int_a^b \varepsilon dx$$

falls $\varepsilon = \text{konst.} \Rightarrow \Delta l = l \cdot \varepsilon$

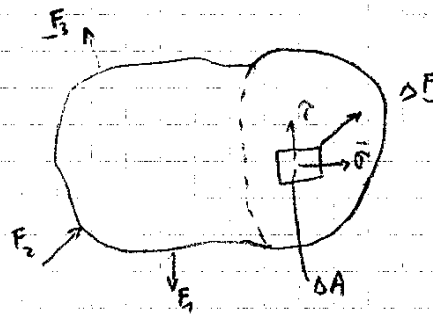
Längenänderung des Stabes (allg.): $\Delta l = \int_a^b \left(\frac{N(x)}{E \cdot A} + \alpha \cdot \Delta T \right) dx$

3.3 Spannungszustand

3.3.1 Spannungsvektor und Spannungstensor



a, belasteter Körper



b, Spannungszustand im P der Schnittfläche

Spannungsvektor \underline{t} :

$$\underline{t} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$$

Kraftvektor: $\Delta F_x = \Delta \begin{pmatrix} M(x) \\ Q_y(x) \\ Q_z(x) \end{pmatrix} = \Delta A \underline{t}_x$

$$\underline{t}_x = \begin{pmatrix} \sigma_x(x) \\ \tau_{xy}(x) \\ \tau_{xz}(x) \end{pmatrix}$$

$$\underline{t}_y = \begin{pmatrix} \tau_{yx}(x) \\ \sigma_y(x) \\ \tau_{yz}(x) \end{pmatrix}$$

$$\underline{t}_z = \begin{pmatrix} \tau_{zx}(x) \\ \tau_{zy}(x) \\ \sigma_z \end{pmatrix}$$

Richtung der Flächennormale

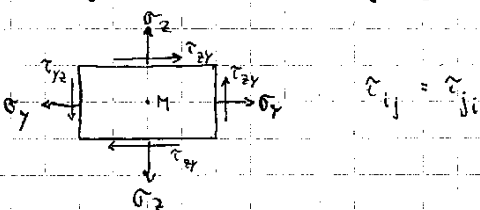
τ_{ij} : $i \rightarrow$ kennzeichnet Flächennormale, $j \rightarrow$ kennzeichnet Richtung der Spannung

Normalspannungen σ sowie Schubspannungen τ gelten als positiv, wenn sie am positiven Schnittufer bzw. im der positiven Schnittfläche in Richtung der positiven Koordinaten zeigen bzw. am negativen Schnittufer / in der negativen Schnittfläche in Richtung der negativen

Koordinatenachsen

Spannungstensor: $\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} \underline{t}_x^T \\ \underline{t}_y^T \\ \underline{t}_z^T \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$

Schubspannungen, die sich in zwei senkrecht aufeinanderstehenden Schnitten befinden, werden zugeordnete Schubspannungen genannt und sind gleich groß:



3.3.2 Ebene Spannungszustand

z.B.: xy -Ebene \Rightarrow ausschließlich Momente in z -Richtung zugelassen.

$$\Rightarrow \sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

-9-

$$t_x = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \end{bmatrix}^T \quad t_y = \begin{bmatrix} \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}^T \quad \underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} t_x^T \\ t_y^T \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

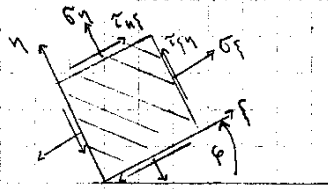
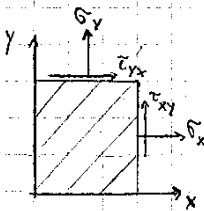
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$ über die Dicke der Platte konstant!

3.3.3 Spannungen für beliebige Schnittrichtungen

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi; \quad \sigma_\varphi = \max := \sigma_1$$

$$\sigma_\eta = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi; \quad \sigma_\eta = \min := \sigma_2$$

$$\tau_{\varphi\eta} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi; \quad \sigma_\varphi = \sigma_1 \wedge \sigma_\eta = \sigma_2 \Rightarrow \tau_{\varphi\eta} = 0$$



es gilt: $\sigma_\varphi + \sigma_\eta = \sigma_x + \sigma_y = \text{const.}$

$$\sigma_\varphi \cdot \sigma_\eta$$

3.3.4 Hauptspannungen

Winkel $\varphi = \varphi^*$, für den $\sigma_\varphi = \max$ und $\sigma_\eta = \min$:

Normalspannungen

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Hauptspannungen:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \sigma_1 > \sigma_2$$

Extremalwerte der Hauptachsenspannungen:

(=: Hauptachsenspannungen)

$$\hat{\tau}_{\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\hat{\tau}_{\max} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

die Spannung: $\frac{N}{mm^2}$

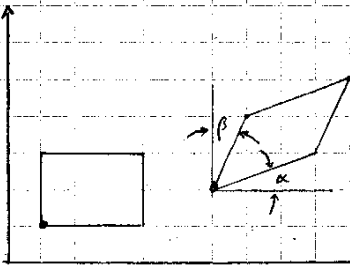
Schubspannung

Winkel $\varphi = \varphi^{**}$, für den $\tau_{\varphi\eta} = \max$: $\tan 2\varphi^{**} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$

Richtungen φ^{**} extremer Schubspannung sind zu den Richtungen φ^* extremer Normalspannung unter $45^\circ (= \frac{\pi}{4})$ neigt.

Hauptrichtungen := Schnittrichtungen φ^* und $\varphi^* + \frac{\pi}{2}$ (stehen senkrecht aufeinander).

3.4. Der ebene und räumliche Verzerrungszustand



$$\cdot (x, y) \rightarrow (u, v)$$

$$\cdot \alpha \text{ und } \beta \text{ klein} \Rightarrow \alpha = \frac{\partial u}{\partial y}, \beta = \frac{\partial v}{\partial x}$$

-10-

Dehnung:

$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$	$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$	$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$
--	--	--

 $(\epsilon_x = \epsilon_{xx}, \epsilon_y = \epsilon_{yy}, \epsilon_z = \epsilon_{zz})$

Scherung / Winkelverzerrung:

$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$
--

(Gleitung)

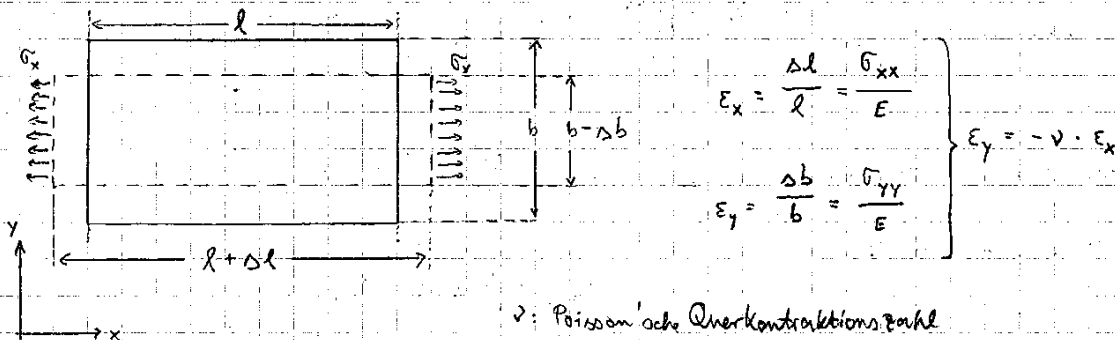
$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$

$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$

Verzerrungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{pmatrix} \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ji}$$

3.5 Spannung-Dehnungs-Beziehungen



Dehnungen:

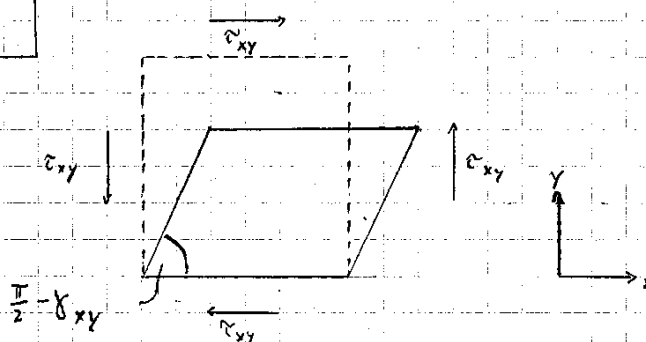
$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy})$	$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx})$
--	--

Schubspannung:

$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$

Schubmodul:

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$



Dehnung (temperaturabhängig):

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha_T \Delta T$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] + \alpha_T \Delta T$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha_T \Delta T$$

-11-

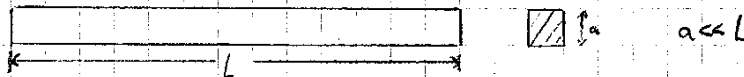
$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$	$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$	$\gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}$
---------------------------------------	---------------------------------------	---------------------------------------

3.6 Technische Biegelehre

3.6.1 Symmetrische reine Biegung

Voraussetzungen:

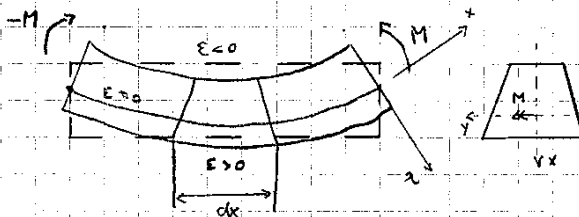
1. Querschnittsabmessungen des Balkens klein gegenüber Balkenlänge



2. Es werden ausschließlich linear elastische Verformungen zugelassen

(\rightarrow Hook'sches Gesetz: $\sigma = \epsilon \cdot E$)

3. Die Balkenbelastung ist Momenten M äquivalent, deren Richtungsvektoren parallel zu einer Hauptachse der Querschnittsflächen sind.



\ast erfüllt z.B.:

1. Querschnittsfläche besitzt eine Symmetrieachse
2. Momentenvektor \vec{M} liegt senkrecht auf dieser Symmetrieachse in der Querschnittsebene

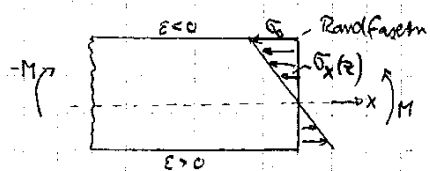
$M > 0$: negative Krümmung

Charakteristische Verformungen:

- die oberen Fasern des Balkens werden gestaucht ($\epsilon < 0$) und die untere gedehnt ($\epsilon > 0$)
- zwischen der oberen und unteren Faser gibt es in der x, y -Ebene eine neutrale Faser (keine Dehnung): $\epsilon = 0$
- zählt man die Koordinate z von dieser neutralen Faser aus, dann folgt für die Dehnung des Balkens mit den für den oberen (oder unteren) Profilrand geltenden Werten ϵ_0 und ϵ_0 :

$$\varepsilon = \varepsilon_x(z) = \frac{\varepsilon_0}{z_0} \cdot z$$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \Rightarrow \sigma = \sigma_x(z) = \frac{\sigma_0}{z_0} \cdot z$$



$$\text{GGW: } N = \int_A \underbrace{\sigma_x}_{\sigma} dA = 0 \quad -M + \int_A z \sigma_x dA = 0$$

-12-

$$M = \frac{\sigma_0}{z_0} \cdot \int_A z^2 dA$$

$:= I_y$

I_y : Flächenträgheitsmoment; Widerstandsmoment: $W_y = \frac{I_y}{z_0}$

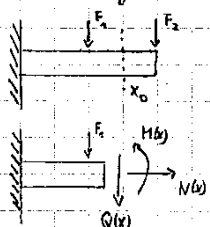
Spannungsverteilung: $\sigma(z) = \frac{M}{I_y} \cdot z$; maximale Spannung: $\sigma_{\max} = \frac{M \cdot z_0}{I_y} = \frac{M}{W_y}$

Die neutrale Faser eines gebogenen Balkens geht durch den Flächmittelpunkt des Querschnitts

3.6.2 Die gerade Biegung

Balken liegt in x, y -Ebene und z -Achse ist eine durch den Schwerpunkt des Querschnitts gehende Hauptachse (z.B. Symmetrieachse)

Bernoulli'sche Hypothese: Querschnittsflächen bleiben auch nach dem Aufbringen der Belastungen eben!



$$\sigma = \sigma_x(x, z) = \frac{M(x)}{I_y} \cdot z$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot z_0}{I_y} = \frac{M_{\max}}{W_y}$$

3.6.3 Flächenträgheitsmomente (quadratische Flächenträgheitsmomente)

• axiale Flächen-Trägheitsmomente:

$$I_y = \int_A z^2 dA \quad I_z = \int_A y^2 dA$$

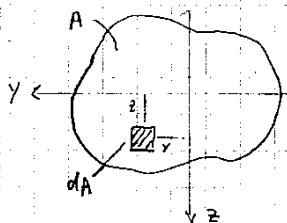
• Flächen-derivationsmoment:

$$I_{yz} = \int_A y z \cdot dA$$

$I_{yz} = 0$, falls Fläche A symmetrisch bezüglich einer der Achsen

• Polares Flächen-Trägheitsmoment:

$$I_P = \int_A r^2 dA = I_y + I_z \quad \text{mit } r^2 = z^2 + y^2$$

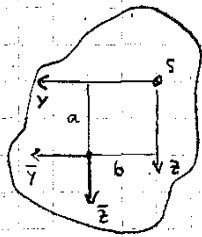


für Rechteck gilt: $dA = dx dy$

für Kreis gilt: $dA = r \cdot d\varphi \cdot dr$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq R$

Parallelverschiebung des Bezugssystems (Satz von Steiner):

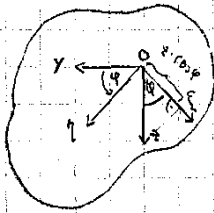
-13-



$I_{\bar{y}} = I_y + a^2 \cdot A$
$I_{\bar{z}} = I_z + b^2 \cdot A$
$I_{\bar{y}\bar{z}} = I_{yz} + a \cdot b \cdot A$

=> die Flächenträgheitsmomente für Achsen durch den Flächenschwerpunkt sind ein Minimum, verglichen mit denen für parallele Achsen geltenden Werten.

Drehung des Bezugssystems, Hauptträgheitsmomente:



$$I_{\eta} = \frac{1}{2} (I_y + I_z) + \frac{1}{2} (I_y - I_z) \cdot \cos(2\varphi) + I_{yz} \sin(2\varphi)$$

$$I_{\xi} = \frac{1}{2} (I_y + I_z) - \frac{1}{2} (I_y - I_z) \cdot \cos(2\varphi) - I_{yz} \sin(2\varphi)$$

$$I_{\eta\xi} = -\frac{1}{2} (I_y - I_z) \cdot \sin(2\varphi) + I_{yz} \cos(2\varphi)$$

es gilt: $I_{\eta} + I_{\xi} = I_y + I_z = I_p$

Winkel $\varphi = \varphi^*$, für den $I_{\eta} = \max$ und $I_{\xi} = \min$: $\tan 2\varphi^* = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}$

Hauptträgheitsmomente: $I_{1/2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$ $I_1 > I_2$

* $I_{\eta\xi} = \max$, wenn Bezugssystem gegenüber den Hauptachsen um 45° verdreht wird.

* für gegebene Fläche und festen Bezugspunkt O gilt:

1) $I_1 + I_2 = I_y + I_z = \text{const.}$

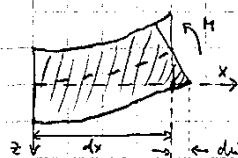
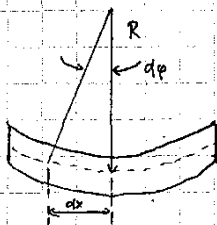
2) $I_1 \cdot I_2 = I_y I_z - I_{yz}^2 = \text{const.}$

* Symmetrieachsen und dazu senkrechte Achsen sind Hauptachsen ($I_{yz} = 0$).

Gibt es 2 oder mehr Symmetrieachsen, sind alle Achsen Hauptachsen

=> $I_{\eta} = I_1 = I_y$, $I_{\xi} = I_2 = I_z$, $I_{\eta\xi} = 0$

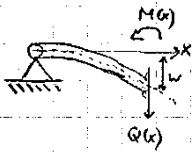
3.7 Biegelinie



$dx = R \cdot d\varphi$

$z \cdot d\varphi = \epsilon(z) \cdot dx = du$

$\frac{1}{R} = \frac{\epsilon(z)}{z}$



E : Elastizitätsmodul

$w(x)$: Durchsenkung an der Stelle x

I_y : Flächenträgheitsmoment

$E \cdot I$: Biegesteifigkeit

Normalspannung σ_x im Balken: $\sigma_x = \frac{M(x) \cdot z}{I_y(z)}$

- 14 -

Biegegleichung: $E I_y w''(x) = -M(x)$

$E I_y w'''(x) = -Q(x)$

$E I_y w''''(x) = \underbrace{q(x)}_{\text{Streckenlast}}$

Idealisierung: $w(x) \ll l$

$$\Rightarrow \frac{dw(x)}{dx} = w'(x) \ll 1$$

Integration:

z.B. $E I_y w''(x) = -M(x)$

$$\Rightarrow E I_y w'(x) = -\int M(x) dx + C_1$$

$$E I_y w(x) = -\iint M(x) dx^2 + C_1 x + C_2$$

(Berechnung von Konstanten über Randbedingungen)

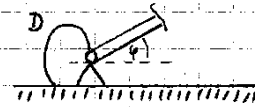
- Neigung der Biegelinie $\sim w'$
- Krümmung der Biegelinie und Biegemoment $\sim w''$
- Querkraft $\sim w'''$
- spezifische Längenbelastung $\sim w''''$

Randbedingungen:

Lager:	w	w'	M	Q
 (gelenkiges Lager)	0	$\neq 0$	0	$\neq 0$
 (Parallelführung)	$\neq 0$	0	$\neq 0$	0
 (Einspannung)	0	0	$\neq 0$	$\neq 0$
 x	$\neq 0$	$\neq 0$	0	0

(gilt für $x=0$)

Dachfeder: $M_D = D \cdot \varphi$, falls $\varphi \ll 1 \Rightarrow M_D = D \cdot w'$ (wg. $\varphi \approx w'$)



D : Federsteifigkeit

allg. Vorgehensweise zur Bestimmung der Biegelinie:

- 1, Auflagerreaktionen bestimmen
- 2, Biegegleichung ansetzen und
- 3, integrieren, bis $E I_y w(x) = \dots$
- 4, Konstanten über Randbedingungen bestimmen und einsetzen

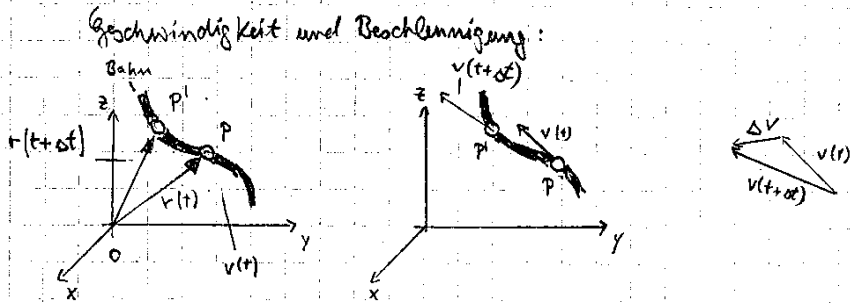
4. Kinematik (Beschreibung der Bewegung von Körpern als Funktionen der Zeit)

4.1 Punktbewegungen

-15-

Ortsvektor: $\underline{r} = \underline{r}(t)$; in kartesischen Koordinaten: $\underline{r} = (x, y, z)^T = x \cdot \underline{e}_x + y \cdot \underline{e}_y + z \cdot \underline{e}_z$

$\underline{e} = (\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)^T$: Einheitsvektor



$$\Delta \underline{r} = \underline{r}_{P'} - \underline{r}_P = \underline{r}(t + \Delta t) - \underline{r}(t)$$

Geschwindigkeit: $\underline{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \dot{\underline{r}}$ (Achtung: beim Ableiten Kettenregel beachten!)

bei raumfesten Koordinatenrichtungen: $\dot{\underline{e}}_x = \dot{\underline{e}}_y = \dot{\underline{e}}_z = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T$

Bogenlänge / Bahnparameter s und Bahngeschwindigkeit v :

$$|\underline{v}| = v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

Beschleunigung: $\underline{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{v}(t + \Delta t) - \underline{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \dot{\underline{v}} = \ddot{\underline{r}}$

bei raumfesten Bezugsrichtungen: $\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \ddot{\underline{r}} = \ddot{x} \underline{e}_x + \ddot{y} \underline{e}_y + \ddot{z} \underline{e}_z = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})^T$

$$|\underline{a}| = a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

4.2 Einachsige Bewegungen

Geschwindigkeit: $v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$

Beschleunigung: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$

$$v = v(x, t) \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) \Rightarrow v = \int_{x=x_0}^x a \cdot dx = \frac{1}{2} [v^2(x) - v_0^2]$$

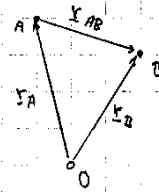
4.3 Kinematik des starren Körpers

4.3.1 Allg. Bewegung des starren Körpers

Der Vektor zwischen zwei ortfesten Punkten A und B eines Körpers läßt sich durch die beiden Ortsvektoren mit inertialem Ursprung O angeben zu:

$$r_{AB}^2 = (r_B - r_A)^2 = \text{const.} \Rightarrow r_{AB}^T \cdot v_A = r_{AB}^T \cdot v_B$$

(Konstanz des Abstands)



-16-

Projektionsatz: Die Projektionen der Geschwindigkeitsvektoren v_A und v_B zweier fester Punkte eines starren Körpers auf die Gerade durch diese Punkte sind stets gleich groß:

$$r_{AB}^T \cdot v_{AB} = 0$$

$$v_A = 0, A: \text{Fixpunkt: } r_{AB} \cdot v_B = 0 \text{ wg. } r_{AB} \perp v_B$$

$$(w \times r_{AB} = v_B \rightarrow v_B = w r_{AB} \cdot \sin \alpha = 0)$$

räumlicher Fall: Drehachse in Ruhe \rightarrow sämtliche Punkte auf Drehachse haben Geschwindigkeit 0

Drehgeschwindigkeitsvektor w :

- w hat die Richtung der momentanen Drehachse
- w ist festgelegt durch die Geschwindigkeiten zweier Punkte (z.B. P und Q) eines starren Körpers.
- die Richtung ist gegeben durch die Schnittgerade der beiden Ebenen durch P und Q senkrecht zu den zugehörigen Geschwindigkeiten:

$$\underbrace{v_P = v_0 + w \times r_{OP}}_{\text{Translationsgeschwindigkeit}} \quad \underbrace{v_Q = v_0 + w \times r_{OQ}}_{\text{Rotationsgeschwindigkeit}}$$

$$\| v_P - v_Q = w \times (r_{OP} - r_{OQ}) = \underbrace{v_Q}_{\text{Translationsgeschwindigkeit}} + w \times r_{QP} \|$$

Satz 1: Jede beliebige Bewegung eines starren Körpers kann als Überlagerung einer Schiebebewegung v_0 (Translation) und einer Drehbewegung $w \times r_{OP}$ gedeutet werden.

Durch den Bewegungsindex (w, v_0) ist das Feld der Geschwindigkeitsvektoren aller Punkte eindeutig bestimmt.

Satz 2: Jede beliebige Lageänderung eines starren Körpers läßt sich durch Verschiebung r_0 (Translation) und Verdrehung φ (Rotation) erreichen

$$\| \text{in 2D gilt: betrachtetes System liegt in } x-y \text{ Ebene} \Rightarrow w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w_z \end{pmatrix} \|$$

Translationsgeschwindigkeit: $\frac{d\vec{r}_0}{dt} = \underline{v}_0$

Drehgeschwindigkeit: $\frac{d\varphi_0}{dt} = \underline{\omega}$ φ_0 : Drehwinkel

-17-

Achtung: Infinitesimale kleine Winkeländerungen $d\varphi$ dürfen wie Vektoren addiert werden, nicht aber endliche Drehwinkel φ .

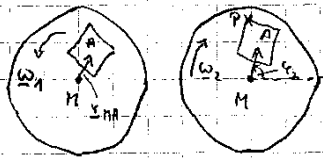
Def: + Rotation: alle Punkte eines Körpers drehen sich um eine gemeinsame Drehachse

+ Translation: Bewegung, bei der die Verbindungsstrecke zwischen zwei beliebigen Punkten A und P eines Körpers ihre Richtung nicht ändert.

Das Drehpaar

antiparallel

Ein Drehpaar (Zwei absolute Drehungen $\underline{\omega}_1$ und $\underline{\omega}_2$ mit $\underline{\omega}_1 \updownarrow \underline{\omega}_2$ und $\omega_1 = \omega_2$) induziert für jeden Punkt eines starren Körpers dieselbe Geschwindigkeit



ruhende Ebene; beide Drehachsen \perp Schreibenebene;

$\underline{\omega}_1 = -\underline{\omega}_2$, $\underline{\omega}_1 \updownarrow \underline{\omega}_2$, $\omega_1 = \omega_2$

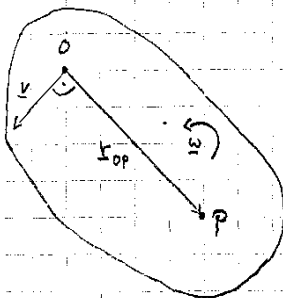
falls $\varphi_1(t=0) = \varphi_2(t=0) \Rightarrow$ Drehvektor $\underline{\omega}_{abs} = \underline{\omega}_1 + \underline{\omega}_2 = \underline{0}$

für Punkt P: $\underline{v}_P = \underline{v}_A + \underline{\omega}_{abs} \times \underline{r}_{AP} = \underline{\omega}_1 \times \underline{r}_{MA}$

Momentenpol P einer ebenen Bewegung (auch: Momentanzentrum)

Momentenpol := reine Drehbewegung um einen augenblicklichen (momentanen) Drehpunkt.

für P gilt: $\underline{v}_P = \underline{0}$

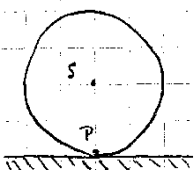


ebene Bewegung: $\underline{r}_{OP} \perp \underline{\omega} \Rightarrow \underline{r}_{OP} \underline{\omega} = \underline{0}$

$\underline{r}_{OP, Pol} = \frac{\underline{\omega} \times \underline{v}_O}{\omega^2} \rightarrow \underline{r}_{OP} \perp \underline{\omega} \wedge \underline{r}_{OP} \perp \underline{v}_O$

mit $\underline{v}_P = \underline{0}$ läßt sich die Geschwindigkeit für jeden Punkt P_i der

Ebene angeben: $\underline{v}_{P_i} = \underline{\omega} \underline{r}_{PP_i}$ ($\underline{v}_{P_i} \perp \underline{r}_{PP_i}$; $\underline{v}_{P_i} \perp \underline{\omega}$)



Bsp.: der Körperspunkt der Scheibe, welcher die Unterlage berührt, ist im Moment der Berührung in Ruhe (kein Schlupf!)

Kugel: $\underline{r}_{Pol} = \underline{r}_{OP} + \underline{r}_{OP, Pol}$

Wichtig: Der Geschwindigkeitszustand eines Körpers, der eine ebene Bewegung ausführt, ist eindeutig festgelegt, wenn z. B. bezüglich einer betrachteten Ebene

a, für einen Punkt P_i die Geschwindigkeit (Betrag + Richtung + Richtungssinn) und für einen weiteren Punkt P_j ($j \neq i$) nur die Richtung der Geschwindigkeit bekannt sind oder

b, wenn der Momentanpol P und die Drehgeschwindigkeit ω (einschließlich Drehsinn) bekannt sind.

- 18 -

Satz: Jede ebene Bewegung eines Körpers kann zu jedem Zeitpunkt als Drehung um einen Pol P (Momentanpol: $v_P = 0$) aufgefasst werden

4.4 Koordinatensysteme, Transformationen

Basiskoordinatensysteme: * inertielle Basis: $O - I^x, I^y, I^z$ (fester Raum)

* Referenzbasis: $O - R^x, R^y, R^z$

* Körperfeste Basis: $O' - K^x, K^y, K^z$

Elementardrehungen: Drehung Vektor I^r nach K^r

$$K^r = \underset{\sim}{A}_{KI} \cdot I^r \quad \text{gilt: } K^r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, I^r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Transformationsmatrix $\underset{\sim}{A}_{KI} = \underset{\sim}{A}_z(\gamma) \cdot \underset{\sim}{A}_y(\beta) \cdot \underset{\sim}{A}_x(\alpha)$ (Kardan-Drehung)

positiver Drehsinn: (= Drehung entgegen Uhrzeigersinn!)

$$\underset{\sim}{A}_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}; \text{ Drehung um } \alpha \text{ um } x\text{-Achse}$$

$$\underset{\sim}{A}_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}; \text{ Drehung um } \beta \text{ um } y\text{-Achse}$$

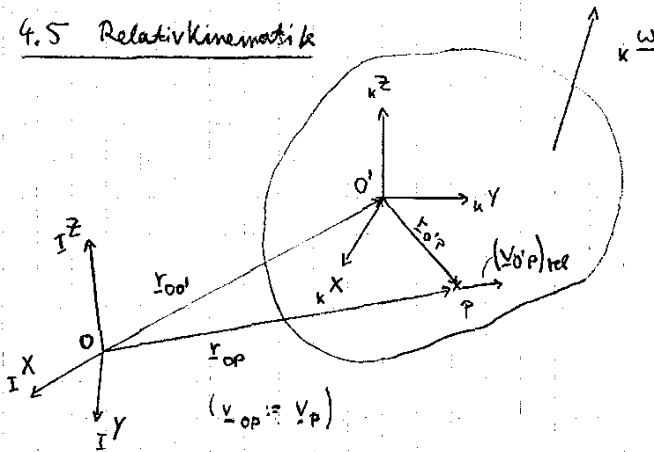
$$\underset{\sim}{A}_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ Drehung um } \gamma \text{ um } z\text{-Achse}$$

negativer Drehsinn: $\underset{\sim}{A}_x(-\alpha) = \underset{\sim}{A}_x^T(\alpha)$; es gilt: $\underset{\sim}{A}_{IK} = \underset{\sim}{A}_{KI}^T$

$$\underset{\sim}{A}_y(-\beta) = \underset{\sim}{A}_y^T(\beta);$$

$$\underset{\sim}{A}_z(-\gamma) = \underset{\sim}{A}_z^T(\gamma)$$

4.5 Relativkinematik



Achtung: Rechnungen sind nur mit Vektoren erlaubt, die im gleichen KO-System dargestellt sind.

- Differenzen von Vektoren:

a) im inertem KO-System: ${}_I \underline{v}_P = {}_I \dot{\underline{r}}_P = \frac{d}{dt} {}_I \underline{r}_P$

b) im bewegtem Bezugssystem: ${}_k \underline{v}_{O'P} + \underbrace{{}_k \underline{\omega} \times {}_k \underline{r}_{O'P}}_{\text{Führungsgeschwindigkeit}} + \underbrace{\frac{d'}{dt} {}_k \underline{r}_{O'P}}_{\text{Relativgeschwindigkeit} := \frac{d'}{dt} {}_k \underline{r}_{O'P}}$

- Absolute Größen im körperlichen KO-System:

$${}_k \underline{v}_P = \underbrace{{}_k \underline{v}_{O'}}_{\text{Führungsgeschwindigkeit}} + \underbrace{{}_k \underline{\omega} \times {}_k \underline{r}_{O'P}}_{\text{Relativgeschwindigkeit} := \frac{d'}{dt} {}_k \underline{r}_{O'P}} + \left(\frac{d'}{dt} \underline{r}_{O'P} \right)_{\text{rel}}$$

kmkrot: ${}_k \underline{v}_{OP} = \underbrace{{}_k \underline{v}_{O'}}_{\text{Führungsgeschwindigkeit}} + \underbrace{{}_k \underline{\omega} \times {}_k \underline{r}_{O'P}}_{\text{Relativgeschwindigkeit} := \frac{d'}{dt} {}_k \underline{r}_{O'P}} + \left(\frac{d'}{dt} \underline{r}_{O'P} \right)_{\text{rel}}$

es gilt: ${}_k \underline{v}_{OP} = A_{kI} \left(\frac{d}{dt} {}_I \underline{r}_{OP} \right)$

$${}_I \underline{v}_{O'O} = \left(\frac{d}{dt} {}_I \underline{r}_{O'O} \right)$$

$$\left(\frac{d'}{dt} {}_k \underline{r}_{O'P} \right)_{\text{rel}} = \frac{d'}{dt} {}_k \underline{r}_{O'P}$$

- Zeitliche Vektorableitung in einem drehenden Bezugssystem:

$$\boxed{\frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{\omega} \times \underline{r} + \frac{d'\underline{r}}{dt}}$$

mit $\frac{d\underline{r}}{dt} = A_{kI} \cdot \frac{d}{dt} {}_I \underline{r}_{O'P}$ und $\frac{d'\underline{r}}{dt} = \frac{d}{dt} {}_k \underline{r}_{O'P}$

$\underline{r}_{00'}$, $\underline{r}_{0'P}$, $\underline{v}_{00'}$, $\underline{v}_{0'P}$: absolute Vektoren; Ursprung O raumfest

$\underline{r}_{0'P}$, $\underline{v}_{0'P}$: relative Vektoren; Ursprung O' bewegt

$\underline{v}_{0'P}$: absolute Geschwindigkeit von P , gemessen gegenüber ruhenden Punkt O .

$(\underline{v}_{0'P})_{\text{rel}}$: relative Geschwindigkeit von P , gemessen gegenüber bewegtem Körperfesten Punkt P_{fest} (zum momentanen Zeitpunkt gilt: $P \equiv P_{\text{fest}}$)

Absolutbeschleunigung: ${}^k \underline{a}_{P, \text{abs}} = {}^k \underline{a}_{\text{Trans}} + {}^k \underline{a}_{\text{Rel}} + {}^k \underline{a}_{\text{Cor}} + {}^k \underline{a}_{\text{Rot}} + {}^k \underline{a}_{\text{ZP}}$

${}^k \underline{a}_{\text{Trans}}$: Translationsbeschleunigung im Ursprung $= {}^k \underline{a}_{00'}$

${}^k \underline{a}_{\text{Rel}}$: Relativbeschleunigung von P gegenüber O' $= \frac{d^2}{dt^2} ({}^k \underline{r}_{0'P}) = ({}^k \underline{a}_{0'P})_{\text{rel}}$

${}^k \underline{a}_{\text{Cor}}$: Coriolis-Beschleunigung $= 2 \cdot {}^k \underline{\omega} \times ({}^k \underline{v}_{0'P})_{\text{rel}}$

${}^k \underline{a}_{\text{Rot}}$: Rotationsbeschleunigung $= \frac{d}{dt} ({}^k \underline{\omega}) \times {}^k \underline{r}_{0'P}$

${}^k \underline{a}_{\text{ZP}}$: Zentripetalbeschleunigung $= {}^k \underline{\omega} \times ({}^k \underline{\omega} \times {}^k \underline{r}_{0'P})$

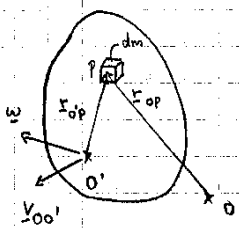
Führungbeschleunigung: ${}^k \underline{a}_F = {}^k \underline{a}_{\text{Trans}} + {}^k \underline{a}_{\text{Rot}} + {}^k \underline{a}_{\text{ZP}}$

die Absolutbeschleunigung wird im ruhenden System gemessen.

$$\underline{a} \times \underline{b} \times \underline{c} = (\underline{a} \cdot \underline{c}) \cdot \underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b}) \cdot \underline{c}$$

Kapitel 5: Kinematik

5.1.1 Impuls (hängt nicht vom Bezugspunkt ab!)



$$\underline{p} = \int_k \underline{v}_P dm = \int_k \underbrace{(\underline{v}_{00'} + \underline{\omega} \times \underline{r}_{0'P})}_{\underline{v}_{0'P}} dm$$

für einen Körper (Verbund von Teilmassen)

$$\text{für einen starren Körper gilt: } \underline{p} = \int_k \underline{v}_{0s} dm = m \cdot \underline{v}_{0s}$$

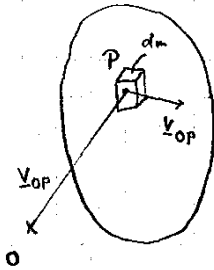
mit \underline{v}_{0s} = absolute Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes

m = konstante Masse

5.1.2 Dreh (hängt vom Bezugspunkt ab)

a, ruhender Bezugspunkt:

-21-

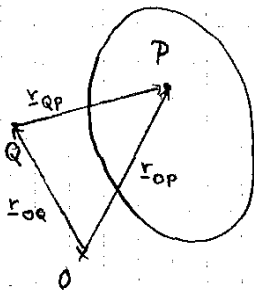


$$\underline{L}_O = \int_k d\underline{L}_O = \int_k (\underline{r}_{OP} \times \underline{v}_{OP}) dm \quad (\text{Verband von Teilmassen})$$

starrer Körper: $\underline{L}_O = \underline{r}_{OP} \times \underline{v}_{OP}$

es gilt: $\underline{a} \times \underline{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$

b, bzgl. eines ruhenden Bezugspunkt Q:



mit $\underline{r}_{OP} = \underline{r}_{OQ} + \underline{r}_{QP}$ und $\underline{\dot{r}}_{OP} = \underline{\dot{r}}_{OQ} + \underline{\dot{r}}_{QP}$

$$\underline{L}_O = \int_k (\underline{r}_{OP} \times \underline{\dot{r}}_{OP}) dm$$

Relativedreh: $\underline{L}_Q = \int_k (\underline{r}_{QP} \times \underline{\dot{r}}_{QP}) dm$

- Mit $P \equiv S$ (P fällt mit Schwerpunkt S zusammen) gilt:

$$\underline{L}_O = \underline{L}_Q + m(\underline{r}_{QS} \times \underline{\dot{r}}_{OQ}) + \underline{r}_{OQ} \times \underline{p} \quad (\underline{\dot{r}}_{OQ} = \underline{v}_{OQ})$$

- für Sonderfall $Q \equiv S$ gilt: $\underline{L}_S = \underline{L}_O - \underline{r}_{OS} \times \underline{p}$

(gilt auch für bewegten Bezugspunkt)

c, Darstellung des Drehes mit Berücksichtigung des Drehvektors $\underline{\omega}$

(mit $Q \equiv S \wedge \underline{\dot{r}}_{O'S} = 0$)

$${}^k \underline{L}_S = {}^k \underline{\Theta}_S \cdot {}^k \underline{\omega} = \begin{pmatrix} \Theta_{xx} & -\Theta_{xy} & -\Theta_{xz} \\ -\Theta_{yx} & \Theta_{yy} & -\Theta_{yz} \\ -\Theta_{zx} & -\Theta_{zy} & \Theta_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad \Theta_{ij} = \Theta_{ji}$$

${}^k \underline{\Theta}_S$: Trägheitstensor $\underline{\Theta}$ im Schwerpunkt S des körperfesten Koordinatensystem K

5.1.3 Massenträgheitsmomente (MTM)

a, äquatoriale MTM: $\Theta_{xx} = \int_K (y^2 + z^2) dm$

$$\Theta_{yy} = \int_K (x^2 + z^2) dm$$

$$\Theta_{zz} = \int_K (x^2 + y^2) dm$$

b, Deviations-MTM: $\Theta_{xy} = \int_K x \cdot y dm$

$$\Theta_{xz} = \int_K z \cdot x dm$$

$$\Theta_{yz} = \int_K y \cdot z dm$$

$$\Rightarrow \tilde{\Theta} = \begin{pmatrix} \Theta_{xx} & -\Theta_{xy} & -\Theta_{xz} \\ -\Theta_{yx} & \Theta_{yy} & -\Theta_{yz} \\ -\Theta_{zx} & -\Theta_{zy} & \Theta_{zz} \end{pmatrix}$$

wg. Symmetrie gilt: $\tilde{\Theta} = \tilde{\Theta}^T$

$\Theta_{ij} = 0$, wenn Koordinatenachsen = Symmetrieachsen (= Hauptachsensystem)

es gilt: $\Theta_{ij} = \Theta_{ji}$

c, Hauptträgheitsmomente: $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$:

$${}^H \tilde{\Theta} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad \text{Haupttensor}$$

Auffinden des Haupt-MTM durch:

$${}^k \underline{L}_s = {}^k \tilde{\Theta}_s \cdot {}^k \underline{\omega} = \lambda \cdot {}^k \underline{\omega} \quad \text{mit } {}^k \underline{L}_s \parallel {}^k \underline{\omega}$$

- charakteristische Gleichung:

$$\underbrace{\left(\tilde{\Theta} - \lambda \tilde{E} \right)}_{= 0 \text{ für}} \cdot {}^k \underline{\omega} = \underline{0}$$

$$\det \left({}^k \tilde{\Theta} - \lambda \tilde{E} \right) = 0$$

\Rightarrow 3 Eigenwerte λ_i mit $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$

λ_i : Hauptträgheitsmomente; \tilde{E} : Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{es gilt: } \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

(nach: Springer, mathematische Formeln, 2. Auflage, S. 90)

d) Transformation von Θ :

-23-

- Parallelverschiebung:

$$B \Theta_{xx} = A \Theta_{xx} + (y^2 + z^2) \cdot m$$

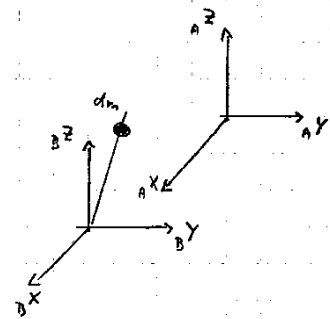
$$B \Theta_{yy} = A \Theta_{yy} + (x^2 + z^2) \cdot m$$

$$B \Theta_{zz} = A \Theta_{zz} + (x^2 + y^2) \cdot m$$

$$B \Theta_{yz} = A \Theta_{yz} + (y \cdot z) \cdot m$$

$$B \Theta_{xz} = A \Theta_{xz} + (x \cdot z) \cdot m$$

$$B \Theta_{xy} = A \Theta_{xy} + (x \cdot y) \cdot m$$



Massenträgheitsmomente

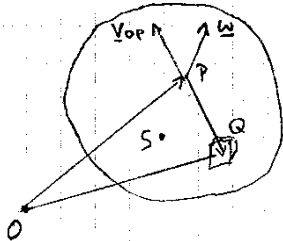
Deviationsmomente

(Huygens - Steiner'scher Satz)

- Verdrehung (Umsprung bleibt unverändert):

$${}_{2\sim} \Theta = {}_{\sim 21} A \cdot {}_{1\sim} \Theta \cdot {}_{\sim 21} A^T$$

5.1.6 Kinetische Energie starrer Körper



P: Körperfest

Q: beliebiger Punkt

S: Schwerpunkt

$$\text{Energie: } T = \frac{1}{2} m v_{op}^2 + m v_{op}^T (\underline{\omega} \times \underline{r}_{ps}) + \frac{1}{2} \underline{\omega}^T \cdot \underline{L}_P$$

Vereinfachung: Bezugspunkt P \equiv Schwerpunkt S

$$\Rightarrow T = \underbrace{\frac{1}{2} m v_{os}^2}_{\text{Translation}} + \underbrace{\frac{1}{2} \underline{\omega}^T \Theta^s \underline{\omega}}_{\text{Rotation}}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} (\Theta_{xx} \omega_x^2 + \Theta_{yy} \omega_y^2 + \Theta_{zz} \omega_z^2) - (\Theta_{xy} \omega_x \omega_y + \Theta_{xz} \omega_x \omega_z + \Theta_{yz} \omega_y \omega_z)$$

Vereinfachung: falls Drehachse in x-Achse liegt $\Rightarrow (\underline{x} \parallel \underline{\omega} = (\omega_x, 0, 0)^T)$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \Theta_{xx} \omega_x^2$$

Impuls- / Drallsatz

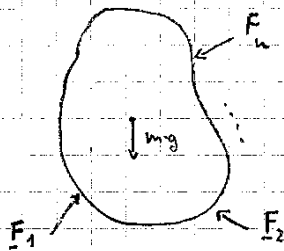
1, Impulsatz

(gibt einen Zusammenhang zwischen $\underline{v}_{S,abs}$ und $\underline{F}_R = \sum_i \underline{F}_i$) ; $\underline{v}_{S,abs} = \underline{v}_S$

-24-

a, Impuls: $\underline{p} = m \cdot \underline{v}_S = \text{konst.}$

b, Impulsatz: $\dot{\underline{p}} = \frac{d}{dt} \underline{p} = m \cdot \underline{a}_S = \sum_i \underline{F}_i$



c, Impulserhaltungssatz: $\dot{\underline{p}} = m \cdot \underbrace{\underline{a}_S}_{\frac{d^2}{dt^2} \underline{r}} = \sum_i \underline{F}_i \stackrel{!}{=} \underline{0}$ (→ Bestimmung der Auflage- / reaktionen in der Kinematik)

2, Drallsatz

(gibt den Zusammenhang zwischen $\underline{\omega}$ und $\sum_i \underline{M}_i$)

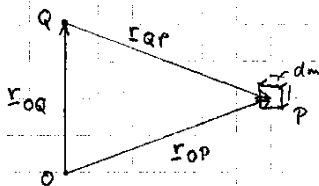
Drall: a, bzgl. ruhenden Bezugspunkt O:

$$\underline{L}_O = m \cdot (\underline{r}_{Op} \times \underline{v}_{Op})$$

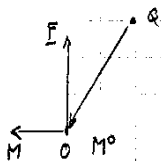


b, bzgl. bewegtem Bezugspunkt Q:

$$\underline{L}_Q = \underline{L}_O - m (\underline{r}_{OQ} \times \underline{v}_{OQ}) - \underline{r}_{OQ} \times \underline{p}$$



b1, falls $\underline{v}_{OQ} = \underline{0}$ (Q raumfest, O per Definition raumfest):



$$\underline{L}_Q = \underline{L}_O - \underline{r}_{OQ} \times \underline{p}$$

b2, falls $Q \equiv S$ (Q fällt mit Massenzentrum S zusammen)

$$\underline{L}_S = \underline{L}_O - \underline{r}_{OS} \times \underline{p} = \underline{\Theta}_S \cdot \underline{\omega}$$

(gilt auch für bewegten Schwerpunkt [$\underline{v}_{OS} \neq \underline{0}$])

5.2.3 Duallatz (Momentensatz)

a, bzgl. ruhenden Bezugspunkt O:

-25-

$$\dot{\underline{L}}_O = \frac{d}{dt} \underline{L}_O = \sum \underline{M}_i = \underline{M}_O$$

Der Gesamtdrehimpuls eines Systems kann durch innere Kräfte / Momente nicht verändert werden.

b, bzgl. bewegtem Bezugspunkt Q:

$$\underline{M}_Q = \frac{d \underline{L}_Q}{dt} + m (\underline{r}_{QS} \times \underline{a}_{OQ}) = \underline{M}_O - \underline{r}_{OQ} \times \dot{\underline{p}}$$

mit \underline{L}_Q : auf den bewegten Punkt Q bezogener Relativdrehimpuls

\underline{r}_{QS} : Ortsvektor von Q zum Schwerpunkt S

\underline{a}_{OQ} : Absolute beschleunigung des Bezugspunktes Q

\underline{M}_Q : das auf den Körper wirkende resultierende Moment, verursacht durch alle am Körper angreifenden äußeren Kräfte und Momente

Relativdrehimpuls \underline{L}_Q : $\underline{L}_Q = \underline{L}_S + m (\underline{r}_{QS} \times \underline{v}_{QS})$

mit \underline{L}_S : auf den Schwerpunkt S bezogenen Relativdrehimpuls

\underline{v}_{QS} : Geschwindigkeit von S gegenüber Q

man beachte: ist ${}^k \underline{L}_Q$ im nichtdrehenden KO-System gegeben, folgt:

$${}^k \dot{\underline{L}}_Q = \frac{d'}{dt} {}^k \underline{L}_Q + {}^k \underline{\omega}_{Ik} \times {}^k \underline{L}_Q = {}^k \underline{M}_Q \quad \text{mit } {}^k \underline{L}_Q = \underbrace{{}^k \underline{\Theta}_Q} + \underbrace{{}^k \underline{\omega}_{abs}}_{{}^k \underline{\Theta}_S + {}^k \underline{\Theta}_{QS}}$$

$$\Rightarrow {}^k \underline{M}_Q = {}^k \underline{\Theta}_Q \cdot \frac{d'}{dt} {}^k \underline{\omega}_{abs} + {}^k \underline{\omega}_{Ik} \times \left({}^k \underline{\Theta}_Q \cdot {}^k \underline{\omega}_{abs} \right)$$

Zu unterscheiden sind:

${}^k \underline{\Theta}_{abs}$: Drehgeschwindigkeit des Körpers gegenüber dem Inertialsystem

${}^k \underline{\omega}_{Ik}$: Drehgeschwindigkeit des Bezugssystem gegenüber dem Inertialsystem

5.3 Energiesatz

$$dW = \int_{v_0}^{v_1} d\vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} (v_1^2 - v_0^2) dm = dT \quad W: \text{Arbeit}$$

$$\text{mit } d\vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{dv}{dt} dm \cdot \frac{dr}{dt} = v \cdot dv \cdot dm = d\left(\frac{v^2}{2}\right) dm$$

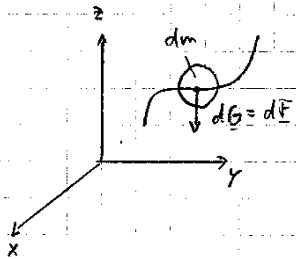
-26-

potentielle Energie V : $-\frac{\partial V}{\partial x} = F_x$, $-\frac{\partial V}{\partial y} = F_y$, $-\frac{\partial V}{\partial z} = F_z$

vektoriell: $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = -\text{grad } V$

Kräfte, die diese Bedingung genügen, werden Konservativ genannt

5.3.1 Potential einer Masse im Schwerfeld



$$d\vec{r} = [dx, dy, dz]^T$$

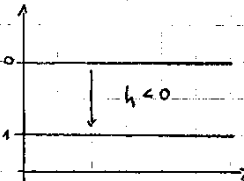
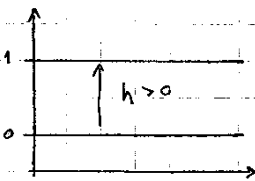
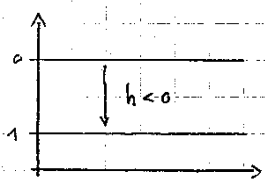
$$d\vec{F} = d\vec{G} = [0, 0, -g \cdot dm]^T$$

$$d\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dm \cdot g \cdot dz$$

$$dW_{01} = \int_0^1 d\vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_0^1 g \cdot dm \cdot dz = -g(z_1 - z_0) dm$$

$$W_{01} = \int_k dW = -g \left[\int_k z_1 dm - \int_k z_0 dm \right] = -m \cdot g \cdot (z_{1s} - z_{2s})$$

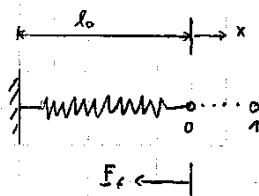
$$W = W_1 - W_0 = m \cdot g \cdot h \quad (g = \text{konst.})$$



$$z_1 < z_0 \rightarrow h < 0 \rightarrow W > 0$$

mit h : Höhendifferenz des Massenmittelpunktes, die während der Bewegung durchlaufen wird

5.3.2 Potential einer Schraubenfeder



$$\text{Federkraft: } \underline{F}_F = -\underline{F}_a = -c \cdot x$$

mit c : Federsteifigkeit

$$\text{Federarbeit: } W = \int_0^1 F_F(x) dx = - \int_0^1 c \cdot x dx = -\frac{1}{2} c x^2$$

$$\text{Federpotential: } V_F = \frac{1}{2} c x^2$$

$$F_F = -\frac{\partial V_F}{\partial x} = -c x$$

$$\text{Energiesatz: } T + V = T_0 + V_0 = \text{const.}$$

In einem konservativem Kraftfeld ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie konstant.

Nachtrag aus Übung:

Energieernte:

$$T_{\text{ges}}(t_0) + V_{\text{ges}}(t_0) \stackrel{!}{=} T_{\text{ges}}(t_n) + V_{\text{ges}}(t_n) \stackrel{!}{=} \text{Konst.}$$

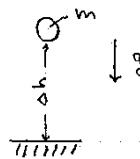
gilt nur für konservative Systeme!

T : Energie
 V : potentielle Energie

Energieformen:

a) Potenitielle Energie:

$$\text{- Masse im Schwerfeld: } V = m \cdot g \cdot \Delta h$$



$$\text{- eine um } \Delta l \text{ gespannte Feder: } V = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \Delta l^2 \quad c: \text{ Federkonstante}$$

$$\text{- eine um den Winkel } \Delta \varphi \text{ gespannte Feder: } V = \frac{1}{2} c \cdot \Delta \varphi^2$$

b) Kinetische Energie

$$\text{- Translationsbewegung: } T = \frac{1}{2} m \cdot v_s^2 = \frac{1}{2} \underline{v}_s^T \cdot m \cdot \underline{v}_s$$

mit m ... Punktmasse eines Körpers, v_s ... Geschwindigkeit im Schwerpunkt

$$\text{- Rotationsbewegung: } T = \frac{1}{2} \underline{\omega}_{\text{abs}}^T \cdot \underline{\Theta}_s \cdot \underline{\omega}_{\text{abs}}$$

$$T_x = \frac{1}{2} \Theta_{xx} \omega^2, \quad T_y = \frac{1}{2} \Theta_{yy} \omega^2, \quad T_z = \frac{1}{2} \Theta_{zz} \omega^2$$

Def.: • Translation nennt man eine Bewegung, bei der die Verbindungsstrecke zwischen zwei beliebigen Punkten A und B eines Körpers ihre Richtung nicht ändert.

• bei einer Rotation bewegen sich alle Punkte des Körpers um eine gemeinsame Drehachse.