

Werktafel der Elektrotechnik - Formelsammlung

Übung 1:

- de Broglie-Wellenlänge: $\lambda = \frac{h}{p}$

- makroskopisch: $p = m \cdot v$

- mikroskopisch: $E_{kin} = e \cdot U_B = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m_0}$

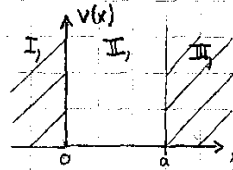
$\Rightarrow p = \sqrt{2 \cdot m_0 \cdot e \cdot U_B}$ (p: Impuls)

eindimensionaler Potentialtopf:

- zeitabhängige Schrödingers-Gleichung:

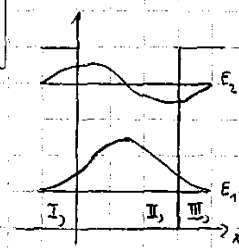
$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x,t) + V(x) \cdot \Psi(x,t) = -j \hbar \frac{\partial}{\partial t} \cdot \Psi(x,t)$$

mit Potential $V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x \leq 0 \\ 0 & \text{für } 0 < x < a \\ \infty & \text{für } x \geq a \end{cases}$



Breite des Potentialtopfs: $0 \leq x \leq a$

- Wellenfunktion: $\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{a} \cdot x\right)$



- Energie: $E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2 m_0 \cdot a^2} \cdot n^2$

mit: $n = 1, 2, 3, \dots$: Quantenzahl, $n=1$: Grundzustand, $n=2$: erster Anregungszustand

$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Js} = 6,6 \cdot 10^{-16} \text{ eVs}$

- diskrete Energieniveaus sind für relativ große Topfbreite ($a \geq 1 \mu\text{m}$ und größer) quasikontinuierlich

- $|\Psi(x,t)|^2 \hat{=}$ Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens

- Bedingung für $\Psi(x)$: am Übergang von II, nach III bzw. I:

a) $\Psi(x)$ muß beschränkt (endlich) sein

b) $\Psi(x)$ muß stetig (ohne Sprünge) sein

c) $\Psi(x)$ muß differenzierbar (ohne Knick bzw. eindeutig) sein

Übung 2:

dreidimensionaler Potentialtopf:

$$E_{nml} = E_x + E_y + E_z = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m \cdot a^2} \cdot (n^2 + m^2 + l^2) \quad \text{Energieeigenwerte (a: Breite)} \quad -2-$$

$$\Psi(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{a^3}} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot y\right) \cdot \sin\left(\frac{l\pi}{a} \cdot z\right) \quad \text{Wellenfunktion}$$

Entartungsgrad = (Anzahl der Zustände, die die gleiche Energie besitzen) $\cdot 2$
(Multiplikation mit 2 wg. Spin)

Wasserstoffatom:

$$E_n = -\frac{m_0 e^4}{2(4\pi\epsilon_0 \hbar)^2} \cdot \frac{1}{n^2} \quad \text{Energie-niveaus}$$

wesentlicher Unterschied zum Potentialwürfel: Energien hängen nur von der Hauptquantenzahl n ab.

$$\text{Entartungsgrad: } 2 \cdot \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = 2 \cdot n^2$$

Heindsche Regeln: siehe Skript-FS S.4

Übung 3:

Kubische Kristallstruktur:

- Zahl der Gitterpunkte der kubischen Einheitszelle
- Abstand des nächsten Nachbarn
- Zahl der nächsten Nachbarn
- Packungsdichte

siehe Skript - FS S.9

Kristallstruktur, Wasserstoff in Metallen:

- Teilchendichte: $n = \frac{\text{Anzahl Atome in Einheitszelle}}{V_{Ez}}$ (typische Werte für $n \approx 10^{18} - 10^{22} \text{ m}^{-3}$)

Anzahl Atome in Einheitszelle:

a, Eckpunkte nur zu $\frac{1}{8}$ rechnen (Anzahl $\times \frac{1}{8}$)

b, Punkte auf Kanten zu $\frac{1}{4}$ rechnen

c, flächenzentrierte Punkte zu $\frac{1}{2}$ rechnen

d, raumzentrierte Punkte ganz rechnen

- ideales Gas: $p \cdot V = N \cdot R \cdot T = k_B \cdot L \cdot N \cdot T$

$\Rightarrow p = k_B \cdot \frac{L^N}{V} \cdot T = k_B \cdot n \cdot T$

p : Druck [Pa] = [10⁻⁵ bar] = $\left[\frac{N}{m^2} \right] = \left[\frac{kg}{m \cdot s^2} \right]$

k_B : Boltzmann-Konstante: $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} J K^{-1}$

L : Loschmidt-Zahl: $L = 6,02 \cdot 10^{23} mol^{-1}$

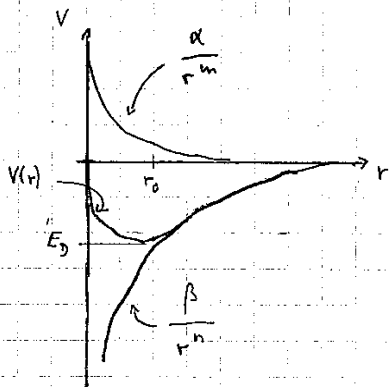
R : Gaskonstante: $R = 8,31 \cdot 10^3 J K^{-1} kmol^{-1}$

n : Teilchendichte $[n] = [N] = [m^{-3}]$

T : Temperatur [K]

• Ionenbindung:

Lennard-Jones-Potential: $V(r) = \underbrace{\frac{-\beta}{r^n}}_{\text{anziehend}} + \underbrace{\frac{\alpha}{r^m}}_{\text{abstoßend}} \quad m > n$



E_D : Dissoziationsenergie

r_0 : Gleichgewichtsabstand

1, Ionische Bindung $\Rightarrow n = 1$

2, Gleichgewichtsabstand: $\left. \frac{dV(r)}{dr} \right|_{r=r_0} = 0$; es gilt: $\frac{d}{dr} \frac{\alpha}{r^m} = -m \frac{\alpha}{r^{m+1}}$

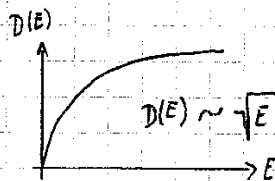
3, $E_D = V(r = \infty) - V(r = r_0)$

Übung 4:

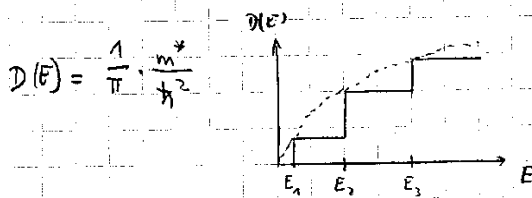
• Zustandsdichte:

* 3D: $D(E) = \frac{1}{2\pi^2} \cdot \left(\frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{E}$

mit $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ $D(E) = \left[\frac{1}{cm^2 eV} \right]$

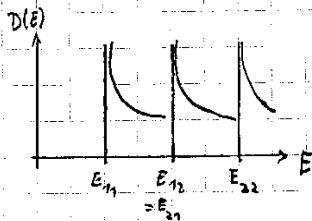


* 2D: (in z-Richtung liegen quantisierte Zustände vor)

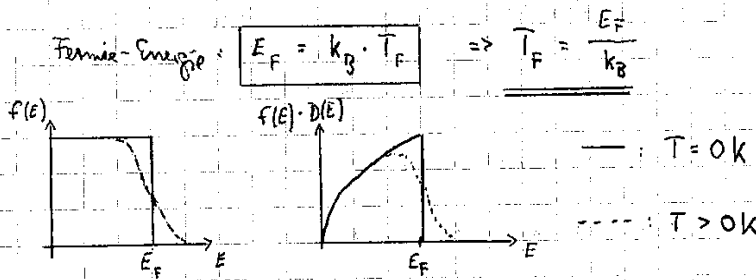


- 4 -

* 1D: (in x- und z-Richtung liegen quantisierte Zustände vor)



Spezifische Wärme: $C_m = \underbrace{3 \cdot R}_{\text{atomarer Anteil}} + \underbrace{\frac{6 N_A k_B \cdot T}{T_F}}_{\text{Beitrag der Elektronen}}$ $[C_m] = \left[\frac{J}{m^3 K} \right]$



Fermiverteilung für $T=0K$: $f(E) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq E \leq E_F \\ 0 & \text{für } E > E_F \end{cases}$

Zustandsdichte: $D(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot \sqrt{E}$ (3D)

$n(E) = \int_0^{E_F} D(E) \cdot f(E) \cdot dE = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot \frac{2}{3} E_F^{3/2} \Rightarrow E_F = \left(3\pi^2 n \right)^{2/3} \cdot \frac{\hbar^2}{2m_e}$
Elektronendichte

Atomdichte: $\frac{L \cdot \rho}{M_{\text{Mol}}}$
N

$n = \alpha \cdot \text{Atomdichte}$
 Elektronendichte

α : Anzahl Leitungselektronen pro Atom

Einheit: ρ in $\frac{g}{cm^3} \Rightarrow$ Atomdichte in $\frac{\text{Atome}}{cm^3}$

Volumenbezogen: $C_V = C_m \cdot \frac{n}{N_A} \cdot \frac{\text{mol}}{cm^3}$

$M_{\text{Mol}} = A_r \cdot \frac{g}{\text{Mol}}$

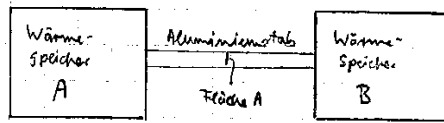
$\frac{C_m(\text{Elektronen})}{C_m(\text{Atome})} \approx 1,48\%$

\Rightarrow Nur Elektronen in der Nähe der Fermi-Energie können thermisch angeregt werden und liefern einen Beitrag zur spezifischen Wärme

Nur Elektronen in der Nähe der Fermi-Energie können thermisch angeregt werden und liefern einen Beitrag zur spezifischen Wärme.

• Wärmekapazität und Wärmefähigkeit

-5-



Keine Wärmeverluste nach außen \Rightarrow adiabatisch
Temperatur: $T_a > T_b$

- Wärmemenge: $Q = C \cdot T = \text{konst.}$

- Endtemperatur T_∞ : $\sum_i Q_i(t=0) = \sum_i Q_i(t \rightarrow \infty)$

$$C_a T_{a0} + C_b T_{b0} = C_a T_\infty + C_b T_\infty \Rightarrow \text{nach } T_\infty \text{ auflösen!}$$

- Transportierte Wärmemenge durch Al-Stab:

* transportierte Wärmemenge pro Flächeneinheit: $\Delta Q = -\lambda A \text{ grad } T \cdot \Delta t = I_{\text{Wärme}}$

* " " " " " Zeiteinheit: $\dot{Q} = -\lambda A \text{ grad } T$

grad T: Antriebs, A: Fläche, λ : Wärmefähigkeit $\left(\frac{W}{K}\right)$;

* Wärmestromdichte: $g = \frac{1}{A} \cdot \frac{dQ}{dt}$

* Wärmetransport durch Metallstab: $\dot{Q} = -\lambda A \cdot \text{grad } T = -\lambda \cdot A \cdot \frac{T_a(t) - T_b(t)}{l}$

(T_a : Eingangstemperatur $>$ T_b : Ausgangstemperatur, l : Länge)

- Speicher A: * $Q(t) = C_a \cdot T_a(t)$

$$* \dot{Q} = C_a \cdot \frac{dT_a}{dt} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{T_a - T_b}{l} \quad (1)$$

- Speicher B: * $Q(t) = C_b \cdot T_b(t)$

$$* \dot{Q} = C_b \cdot \frac{dT_b}{dt} = +\lambda \cdot A \cdot \frac{T_a - T_b}{l} \quad (2)$$

$$(1) - (2): \frac{dT_a}{dt} - \frac{dT_b}{dt} = \frac{d}{dt} (T_a - T_b) = - \underbrace{\frac{\lambda \cdot A \cdot (C_a + C_b)}{C_a \cdot C_b \cdot l}}_{=: 1/\tau} \cdot \underbrace{(T_a - T_b)}_{=: \Delta T}$$

$$\frac{d}{dt} \Delta T = -\frac{1}{\tau} \Delta T \Rightarrow \text{Lösung der DGL: } \Delta T(t) = \Delta T_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$\Delta T := T_a - T_b, \quad \Delta T_0 := T_{a0} - T_{b0} \quad \Rightarrow \underline{\underline{t = -\tau \cdot \ln\left(\frac{\Delta T}{\Delta T_0}\right)}}$$

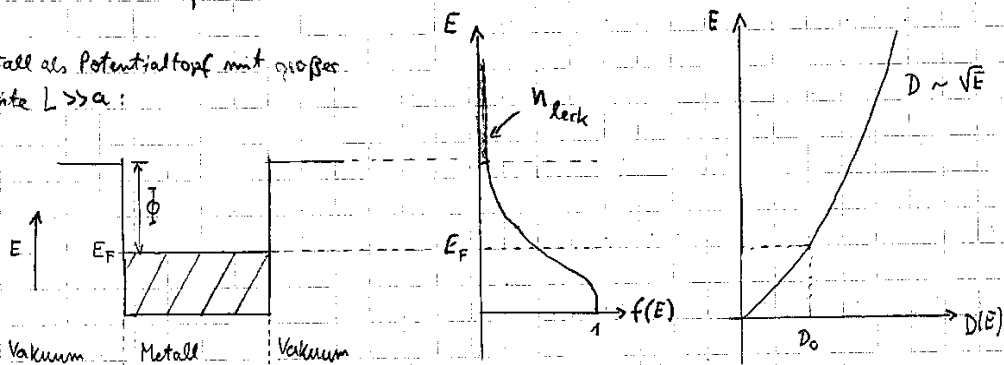
$$C_a = 3 \cdot N_A \cdot k_B = 3 \cdot \frac{m}{m_{\text{Mol}}} \cdot \underbrace{L \cdot k_B}_{R} \quad (\text{Elektronenteil vernachlässigt})$$

$$\frac{m}{m_{\text{Mol}}} := m_{\text{rel}} \cdot \frac{g}{\text{Mol}}$$

Übung 5

- Thermische Emission, Fermi-Statistik

Metall als Potentialtopf mit großer Breite $L \gg a$:



Näherung Zustandsdichte $D(E)$ ist nahe E_F nahezu konst. (D_0)

- a, Berechnung von n_{ges} für $T=0K$:

$$n_{ges} = \int_0^{\infty} D(E) \cdot f(E, T) \cdot dE \quad \text{mit } D(E) = D_0 \quad f(E, T=0) = \begin{cases} 1 & \text{für } E < E_F \\ 0 & \text{für } E > E_F \end{cases}$$

$$\Rightarrow n_{ges} = \int_0^{E_F} D_0 \cdot 1 \cdot dE = D_0 \cdot E_F$$

- b, Berechnung von n_{leck} für $T > 0$:

$$n_{leck} = D_0 \cdot k_B \cdot T \cdot e^{-\left(\frac{\Phi}{k_B \cdot T}\right)}$$

mit: Φ : Austrittsarbeit (in eV) [Abstand Vakuum-Niveau \leftrightarrow Fermi-Niveau]

T : Temperatur (in K)

$$c, \frac{n_{leck}}{n_{ges}} = \frac{k_B \cdot T}{E_F} \cdot e^{-\left(\frac{\Phi}{k_B \cdot T}\right)} \quad (*)$$

Elektronen in einem Metall können als freies Elektronengas in einem Potentialtopf aufgefasst werden. Damit Elektronen diesen Potentialtopf verlassen können, müssen sie eine Energie Φ haben, die größer als die Austrittsarbeit Φ des Metalls ist.

(*) ist der Prozentsatz des Elektronen, der in der Lage ist, bei einer festgelegten Temperatur T die Potentialbarriere zum Vakuum zu überwinden.

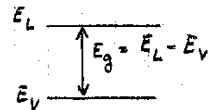
Vereinfachungen: - Zustandsdichte unabhängig von Energie $D(E) = D_0$

- Lage des Fermi-Niveaus ändert sich nicht mit der Temperatur

• Ladungsträgerdichte, Fermi-Niveau und Boltzmann-Verteilung

a, Eigenleitungsträgerdichte:

$$n_i = \sqrt{N_L^* N_V^*} \cdot \exp\left(-\frac{E_g}{2k_B T}\right)$$



(Einheit $n, p: \text{cm}^{-3}$)

b, Lage des Fermi-Niveaus bei Eigenleitung:

$$1) \quad n = n_i = N_L^* \exp\left(-\frac{E_L - E_F}{k_B T}\right) \Rightarrow E_L - E_F = -k_B T \cdot \ln\left(\frac{n_i}{N_L^*}\right)$$

$$2) \quad p = p_i = N_V^* \exp\left(-\frac{E_F - E_V}{k_B T}\right) \Rightarrow E_F - E_V = -k_B T \cdot \ln\left(\frac{n_i}{N_V^*}\right)$$

$$\text{es gilt: } N_L^* = 2 \cdot \left(\frac{m_e^* \cdot k_B T}{2\pi \hbar^2}\right)^{3/2} \quad N_V^* = 2 \cdot \left(\frac{m_h^* \cdot k_B T}{2\pi \hbar^2}\right)^{3/2}$$

N_L^*, N_V^* : effektive Zustandsdichten

$$E_F = \frac{E_V + E_L}{2} + \frac{k_B T}{2} \cdot \ln\left(\frac{N_V^*}{N_L^*}\right)$$

c, Löcherdichte und Lage des Fermi-Niveaus eines n-dotierten Halbleiters

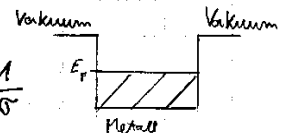
$$\text{Löcherdichte: } n \cdot p = n_i^2 \Rightarrow p = \frac{n_i^2}{n}$$

Lage des Fermi-Niveaus: mit Formeln 1, und 2, (ersetze n_i durch n und p_i durch p)

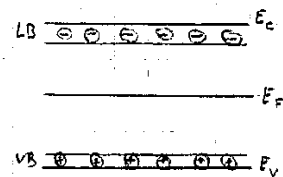
Blatt 6:

• Leitfähigkeit: (Einheit: $\Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$)

- Metalle: $\sigma = n \cdot e \cdot \mu_e$; spezifischer Widerstand: $\rho = \frac{1}{\sigma}$



- Halbleiter: $\sigma = \underbrace{n \cdot e \cdot \mu_e}_e + \underbrace{p \cdot e \cdot \mu_p}_h$



n-Dotierung: $n \gg p \Rightarrow \sigma \approx n \cdot e \cdot \mu_e$

p-Dotierung: $p \gg n \Rightarrow \sigma \approx p \cdot e \cdot \mu_p$

intrinsischer HL: $n = p = n_i = p_i \Rightarrow \sigma = n_i \cdot e \cdot (\mu_e + \mu_p) \quad n_i^2 = n \cdot p$

- Art der Majorität, Ladungsträger:

Falls Dotierstoff zu einer höheren Hauptgruppe gehört als das undotierte Material, sind die Majorität, Ladungsträger Donatoren. (\Rightarrow n-Dotierung)

Bsp: Si-Probe: IV-Hauptgruppe $\rightarrow 4 e^-$ für Bindung

Dotierung Sb: V-Hauptgruppe $\rightarrow 1 e^-$ übrig

\Rightarrow Sb gibt $1 e^-$ ab \Rightarrow Sb ist Donator

$$\left. \begin{aligned} n &= n_i + N_D^+ \\ p &= p_i + N_A^- \end{aligned} \right\} \text{alle Störatome ionisiert} \left\{ \begin{aligned} n &= n_i + N_D \approx N_D, \quad n \gg p \\ p &= p_i + N_A \approx N_A, \quad p \gg n \end{aligned} \right.$$

- Freeze-out-Bereich: kleine $T \rightarrow$ nicht alle Störatome sind ionisiert

$$n = n_i + N_D^+ \approx \sqrt{N_D \cdot N_L^+} \cdot \exp\left(-\frac{E_L - E_D}{2k_B T}\right)$$

- Sättigungsbereich: mittlere Temperatur (i. a. betrachtet)

$$n = n_i + N_D = N_D$$

- intrinsischer Bereich: sehr hohe Temperaturen

$$n = n_i + N_D^+ = \sqrt{N_L^+ \cdot N_V^+} \cdot \exp\left(-\frac{E_g}{2k_B T}\right) + N_D$$

n_i kann Größenordnung von N_D erreichen

• statische elektronische Polarisation:

ges: Plattenkondensator C im Vakuum \rightarrow wird mit Gleichspannungsquelle der Spannung U_0 aufgeladen, Spannungsquelle wird danach von Kondensatorplatten getrennt \Rightarrow Ladung Q_0 unveränderlich.

Anschließend wird Schutzgas (Druck p und Temperatur T gegeben) eingelassen.

ges: Spannungsänderung

$$Q = \text{const.} = C \cdot U_0$$

ohne Gas mit Gas

$$\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_0 \epsilon_r$$

$$C \rightarrow C' = \epsilon_r \cdot C$$

$$Q \rightarrow Q$$

$$Q = C \cdot U_0 \rightarrow Q = C' \cdot U_0' = C \cdot U_0 \Rightarrow \underline{U_0' = \frac{C}{C'} \cdot U_0 = \frac{U_0}{\epsilon_r}}$$

mikroskopisch: Feld verschiebt Elektronenhülle gegenüber Kern:

$$\vec{p} = \epsilon_0 \cdot \alpha \cdot \vec{E}_0$$

makroskopisch: Polarisation als Summe der Einzelpole

$$\left. \begin{aligned} \text{Polarisation: } \vec{P} &= \epsilon_0 \alpha N \vec{E}_a \\ &= \epsilon_0 \chi \vec{E}_a \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \boxed{\chi = N \cdot \alpha = \epsilon_r - 1}$$

ϵ_r : [1]
nur bei Gasen!
N: Atomdichte

* elektrische Polarisation: (tritt immer auf)

$$\alpha = 4\pi R^3 \quad (R: \text{Atomradius}) \quad \text{Einheit: [m}^3]$$

* ionische Polarisation: (tritt in Ionenkristallen auf)

$$\alpha = \frac{q^2}{4c\epsilon_0} \quad c: \text{Federkonstante}$$

* Orientierungspolarisation: (tritt nur bei vorhandenen permanenten Dipolen auf)

$$\alpha = \frac{p^2}{3k_B T \epsilon_0} \quad p: \text{Dipolmoment}$$

* bei Festkörpern: starker Einfluss der Umgebung

→ Feld induziert Gegenfeld (Lorenzfeld)

$$\alpha = \frac{N \cdot \alpha}{1 - \frac{\alpha \cdot N}{3}}$$

bei Gasen: Atome weit entfernt → $\chi = N \cdot \alpha$

für Gase gilt: nur elektrische Polarisation ⇒ $\alpha = 4\pi R^3$

$$\text{ideale Gasgleichung: } p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{V} = \frac{p}{R \cdot T}$$

p: Druck (in Pa; 1 bar = $1 \cdot 10^5$ Pa)

n: Anzahl der Mole

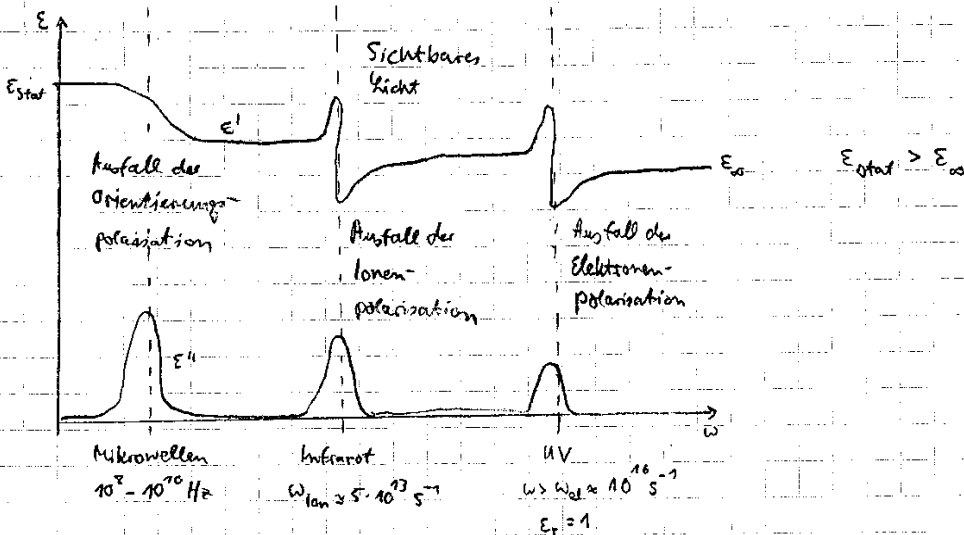
$$\text{Atomdichte: } N = \frac{n \cdot L}{V} = \frac{p \cdot L}{R \cdot T} \quad [\text{m}^{-3}]$$

L: Loschmidt-Zahl = $6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

R: Rydberg-Konstante = $1,10 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$

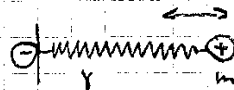
$$\Rightarrow \epsilon_r = N \cdot \alpha + 1$$

• Komplexe Dielektrizitätskonstante: betrachtet wird frequenzabhängiges Feld



1. elektr. und ionische Polarisation:

Dipol $\hat{=}$ gedämpfte harmonische Oszillator



→ Dgl 2. Ordnung

elektr. Pol. → Resonanz im UV (tritt immer auf!)

ionische Pol. → Resonanz im IR (nicht bei Gasen!)

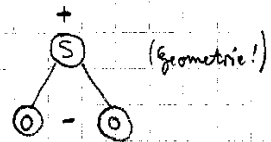
2. Orientierungspolarisation (nicht bei Edelgasen und Ionenkristall!)

Ausrichtung der Dipole im Feld \leftrightarrow Streuprozesse (Temperatur)

→ bei hohen Frequenzen: Phasenverzögerung $\hat{=}$ Verlust

→ charakteristische Relaxationszeit τ

Beispiel: SO2



$\epsilon_r(\omega) = \epsilon' - j\epsilon''$	$\epsilon'(\omega) = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_{stat} - \epsilon_\infty}{1 + \omega^2 \tau^2}$	$\epsilon''(\omega) = \frac{\epsilon_{stat} - \epsilon_\infty}{1 + \omega^2 \tau^2} \cdot \omega \tau$
--	---	--

$\tan \delta = \frac{\epsilon''(\omega)}{\epsilon'(\omega)} = \frac{\omega \tau}{1 + \frac{\epsilon_\infty}{\epsilon_{stat} - \epsilon_\infty} \cdot (1 + \omega^2 \tau^2)}$; $\tan \delta$: Verlustwinkel

Maximalwert: $\frac{d}{d\omega} \tan \delta = 0$; $\tau = \frac{1}{\omega} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_{stat}}{\epsilon_\infty}}$ mit $\omega = 2\pi f$

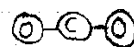
$\epsilon_\infty(1/2) = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4 \epsilon_{stat}^2}}{2}$ nur eine Lösung: $\epsilon_\infty < \epsilon_{stat}$

mit $k = (1 + 2a^2) \cdot 2 \epsilon_{stat}$; a : maximalwert von $\tan \delta$ bei der Frequenz f

Gegenbeispiele:



CO2:



Blatt 7:

Magnetismus:

- Diamagnetismus: ($\mu_r < 1$; $\chi^m < 0$, temperaturunabhängig)

* tritt immer auf (wird durch äußeres Feld induziert)

* wird bei gleichzeitigem Para- bzw. Ferromagnetismus überlagert

* diamagnetische Suszeptibilität: $\chi_{\text{dia}}^m = -\frac{N}{6m_e} \cdot Z^4 \cdot e^2 \cdot \overline{r^2} \cdot \mu_0$

	Lithium	Xenon
χ_{dia}^m	$-0,5 \cdot 10^{-6}$	$-50 \cdot 10^{-6}$

→ i.a. kleiner Effekt (diamagn. Beitrag der Atomrümpfe)

- Paramagnetismus: ($\mu_r > 1$, $\chi^m > 0$)

* tritt nur bei nicht abgeschlossenen Schalen auf

→ Bahndrehimpuls und/oder Spin → magnetisches Moment

* Ausrichtung permanenter magnetischer Momente

$$\chi_{\text{Para}}^m = \frac{C}{T}; \quad C = \frac{N \cdot \mu_0 \cdot g^2 \cdot J \cdot (J+1) \cdot \mu_B^2}{3 \cdot k_B}; \quad g = 1 + \frac{J \cdot (J+1) + S \cdot (S+1) - L \cdot (L+1)}{2 \cdot J \cdot (J+1)}$$

nur Bahndrehimpuls: $S=0 \rightarrow J=L \rightarrow g=1$

kein Bahndrehimpuls: $L=0 \rightarrow J=S \rightarrow g=2$

J: Gesamtdrehimpuls

* im Gitter ist der Bahndrehimpuls nicht von Bedeutung: $L=0 \rightarrow g=2$

* im Metallen müssen die Leitungselektronen sehr betrachtet werden

$$\chi_{LE}^m = \chi_{\text{Para}}^m + \chi_{\text{dia}}^m = n \cdot \frac{\mu_0 \mu_B^2}{k_B \cdot T_F} \quad (\text{temperaturunabhängig, falls } T_F \gg T)$$

bei Kupfer: Atomdichte N = Elektronendichte n

$$E_F = k_B \cdot T_F = \frac{\hbar^2}{2m_e} \cdot \left(3\pi^2 n \right)^{\frac{2}{3}}$$

- Ferromagnetismus ($\mu_r \gg 1$, $\chi^m \gg 1$)

* spontane Magnetisierung auch ohne äußeres Feld /
spontane Ausrichtung der permanenten magn. Momente durch Wechselwirkung

- $\chi_{gs}^m = \chi_{dia}^m + \chi_{para}^m$ bzw. $\chi_{gs}^m = \chi_{dia}^m + \chi_{el}^m$ (z.B. bei Kupfermetall)
 Einheit: dimensionslos bei Leitungssektionen

• Paramagnetismus lokalisierter magnetischer Momente:

-12-

- magnetisches Moment: $\vec{M} = -g \cdot \mu_B \cdot \vec{J}$ (allg. Formel)

$M_z = -g \cdot \mu_B \cdot M$ (z-Komponente, meist betrachtet)

$|\vec{M}| = -g \cdot \mu_B \cdot \frac{\hbar \cdot \sqrt{J \cdot (J+1)}}{\hbar} = -g \cdot \mu_B \cdot \sqrt{J \cdot (J+1)}$

es gilt: $M = -J \dots J$

- mittleres magnetisches Dipolmoment eines Atoms:

$$\overline{M_D} = \frac{\sum_{M=-J}^J (-g \mu_B \cdot M) \cdot W(M)}{\sum_{M=-J}^J W(M)} \quad W(M) \sim e^{-\left(\frac{E_M}{k_B \cdot T}\right)}$$

Energie eines magnetischen Dipols im äußeren Feld $H = \frac{B}{\mu_0}$:

$E_M = -\mu_0 \cdot H \cdot M_z = -B \cdot M_z$

- Magnetisierung pro Volumeneinheit: $M_{para} = N \cdot \overline{M_D}$

Teilchen pro Volumen: $N = \frac{N_A}{\text{Molvolumen}}$ mit $\text{Molvolumen} = \frac{\text{Molgewicht}}{\text{Dichte}}$

Einheit Molvolumen: $\frac{\text{cm}^3}{\text{mol}}$

Beispiel: Molvolumen von $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$

Dichte von $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$: $2,28 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

Rel. Atommassen: $\text{Cu} = 63,5$ $\text{S} = 32$ $\text{O} = 16$ $\text{H} = 1$

$\Rightarrow \text{Molvolumen} = \frac{63,5 + 32 + 4 \cdot 16 + 5 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 16 \cdot \left(\frac{\text{g}}{\text{mol}}\right)}{2,28 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}$

$M = \chi \cdot H = \chi \cdot \frac{B}{\mu_0} \Rightarrow \chi = \frac{\mu_0 \cdot M}{B}$

Nachtrag: Probeklausur

• Metallische Bindung

-13-

Geschwindigkeit der Elektronen am Fermi-Kante: $E_F = \frac{1}{2} m_e \cdot v_{el}^2 \Rightarrow v_{el} = \sqrt{\frac{2 E_F}{m_e}}$

— " — der Phononen: $v_{Ph} = \sqrt{\frac{c}{\rho}}$ c : Elastizitätsmodul [$N m^{-2}$]

ρ : Dichte [$kg m^{-3}$]

spezifische Wärme der Elektronen pro Volumeneinheit: $C_{el} \approx 6 \cdot n \cdot k_B^2 \cdot \frac{T}{E_F}$ in [$\frac{J}{K \cdot m^3}$]
↑ falls $\frac{k_B \cdot T}{E_F} \ll 1$

Wiedemann-Franz-Gesetz: $\lambda_{el} = \frac{1}{3} C_{el} \cdot v_{el} \cdot \ell_{el} = \frac{4 n k_B^2 \cdot T}{m} \cdot \tau$

$$\lambda_{el} = \sigma \cdot T \cdot L = \frac{1}{9} \cdot T \cdot L \quad \text{in } \left[\frac{W}{m \cdot K} \right]$$

mit: ℓ_{el} ... mittlere freie Weglänge (bei Streuprozessen); $\ell_{el} = v_{el} \cdot \tau$

σ ... elektrische Leitfähigkeit der Leitungselektronen

ρ ... spezifischer Widerstand [Ωm]

L ... Lorentzzahl := $\frac{\pi^2 k_B^2}{3 \cdot e^2} = 2,44 \cdot 10^{-8} \frac{V^2}{K^2}$

• Halbleiter:

$$E = \hbar \omega = \hbar \cdot c \cdot k = \hbar \cdot c \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \quad c \dots \text{Lichtgeschwindigkeit; } E \text{ in } [eV]$$

$$\Rightarrow \text{„Merkregel“: } \lambda [\mu m] = \frac{1,239}{E [eV]} \quad (\hbar \cdot c \approx 1,239)$$

$$n_i(T_2) = \underbrace{n_i(T_1)}_{\text{gegeben!}} \cdot \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{3/2} \cdot \exp \left[-\frac{E_G}{2 k_B} \cdot \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) \right]$$

τ ... Stauzeit (mittlere Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Streuprozessen)

$$\tau = \frac{\sigma \cdot m_e}{n \cdot e^2} = \frac{m_e \cdot m_e}{e}$$

$$\text{• Atomdichte: } N = \frac{L \cdot \rho}{m_{Mol}} = \frac{m}{m_{Mol}} \cdot R = \frac{n \cdot L}{V} = \frac{P \cdot L}{R \cdot T}$$